Olimpiai szakkör **2026. október 16.**

1. Egy 2026×2027-es sakktáblát egyrétegűen lefedtünk néhány 2×2-es és 1×4-es dominóval. A fölhasznált készlet egy 2×2-es dominóját 1×4-esre cseréljük. Bizonyítsuk be, hogy az új készlettel nem fedhető le a sakktábla.

(Forrás: KöMaL B.4042.)

2. Jelölje $f(n)$ az n pozitív egész szám tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összegét. Mennyi lehet $f(3a)$, ha $f(a) = 100$ és $f(124a) = 700$?

(Forrás: KöMaL B.4037.)

3. Véges sok körlap együtt T területű részt fed le a síkon. Mutassuk meg, hogy a körlapok közül kiválaszthatunk néhányat, amelyek nem nyúlnak egymásba, és legalább $T/9$ területű részt fednek le.

(Forrás: KöMaL B.4047.)

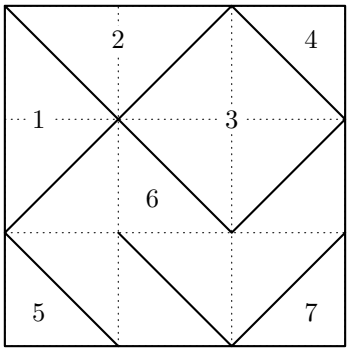
4. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából induló magasságának talppontja az AB átfogón D. A B csúcsból induló szögfelező a CD magasságot az E, az AC befogót az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AD > 2 \cdot EF$.

(Forrás: OKTV 2010/2011, III. kategória, döntő, 1. feladat)

5. Van-e olyan pozitív egész, amelynek pozitív osztói között 2011-szer annyi négyzetszám van, mint köbszám?

(Forrás: OKTV 2010/2011, III. kategória, döntő, 2. feladat)

6. Legyen N egy pozitív egész szám. Egy $N \times N$-es táblázat mind az N^2 egységmezőjének be van rajzolva az egyik átlója. Ezek az átlók az $N \times N$-es táblázatot K régióra osztják. Minden N-re határozd meg K lehető legkisebb, illetve legnagyobb értékét.



1. ábra. Példa $N = 3$-ra és $K = 7$-re

(Forrás: MEMO 2015, csapatverseny, 4. feladat)

7. Minden p prímre van egy királyság, p-ország, amely p darab szigetből áll, melyek az $1, 2, \ldots, p$ számokkal vannak megszámozva. Az n és m ($n \neq m$) számú szigetek között pontosan akkor van híd, ha p osztja az $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$ kifejezést. A hidak egymás felett átívelhetnek, de nem keresztezhetik egymást. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan p van, amelyre található két sziget p-országban, melyek nincsenek összekötve hidak láncolatával.

(Forrás: IMO Shortlist 2020, N2)

8. Anna és Bálint a következő játékot játsszák: Anna rajzol egy tetszőlegesen nagy üres (azaz él nélküli) gráfot, majd egyesével behúz tetszőleges éleket, amelyeket Bálint közvetlenül a behúzás után kékre vagy pirosra színez. További szabály, hogy az így keletkező gráfban minden csúcs foka legfeljebb k lehet, és k értékében előre megállapodnak. Melyik az a legkisebb k, amely mellett Anna ügyes játékkal mindenképpen létre tud hozni egy 2011 hosszúságú egyszínű utat?

(Forrás: OKTV 2010/2011, III. kategória, döntő, 3. feladat)

9. Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg a legkisebb pozitív egész k számot, amire teljesül a következő: meg lehet jelölni egy $2n \times 2n$-es táblázat k mezőjét úgy, hogy pontosan egyféleképpen lehet a táblázatot 1×2-es és 2×1-es dominókkal (hézagmentesen és átfedés nélkül) lefedni úgy, hogy egyetlen dominó se tartalmazzon két megjelölt mezőt.

(Forrás: IMO Shortlist 2016, C8)