Olimpiai szakkör 2026.10.02.

1. Bizonyítsd be, hogy bármely háromszöget lehet úgy tükrözni egy egyenesre, hogy az eredeti és a tükörkép közös részének a területe a háromszög területének több, mint 3/4-ed része.

2. Legyen a és b két adott pozitív egész szám. Tudjuk, hogy tetszőleges k pozitív egész szám esetén ka-nak legalább annyi osztója van, mint kb-nek. Bizonyítandó, hogy b osztja a-t.

3. Legyen $ABCDEF$ egy húrhatszög. Bizonyítandó, hogy az ABC háromszög súlypontját összekötve a DEF háromszög magasságpontjával, a CDE háromszög súlypontját összekötve az FAB háromszög magasságpontjával és a EFA háromszög súlypontját összekötve a BCD háromszög magasságpontjával a kapott három egyenes egy ponton megy át.

4. Bizonyítandó, hogy egy $8 \times 8 \times 8$-as kocka három páronként élszomszédos lapját nem lehet lefedni 64 darab 1×3-as téglalap alakú matricával (hézagmentesen és átfedés nélkül).

5. Egy tetszőleges m pozitív egészhez vegyünk minden lehetséges módon olyan $a_1 < a_2 < \cdots < a_t$ egészeket, amelyekre $a_1 = m$ és az $a_1 a_2 ... a_t$ szorzat négyzetszám (t = 1 is megengedett). Jelöljük $S(m)$-mel a_t lehető legkisebb értékét. Például $S(1) = 1$, $S(2) = 6$, mert $m = 2$ esetén a $2 \cdot 3 \cdot 6$ szorzat a legjobb választás, $S(3) = 8$, $S(4) = 4$ stb.

   Bizonyítsuk be, hogy az $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, . . . sorozatban éppen a pozitív összetett számok szerepelnek, éspedig mindegyik pontosan egyszer fordul elő.

6. (IMO 1999/1) Egy $n \geq 3$ pontból álló $S \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmazra teljesül, hogy bármely $A, B \in S$ $(A \neq B)$ pontokra S szimmetrikus az AB szakasz felezőmerőleges síkjára. Bizonyítsd be, hogy S szabályos sokszög, szabályos tetraéder vagy szabályos oktaéder.

7. (IMO 1999/4) Keressük meg az összes pozitív egészekből álló (x, p) párt, ahol p prím, $x \leq 2p$ és $x^{p-1} | (p-1)^x + 1$.

8. (IMO 1998/3) Keressük meg az összes pozitív egész k számot, melyhez lehet találni egy n egész számot úgy, hogy $k = d(n^2)/d(n)$ (ahol $d(n)$ az n szám osztóinak számát jelöli).