Olimpiai iskola, 2026. október 22: vegyes feladatok

Hangolódás az első feladatra

1. Bizonyítsd be, hogy a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át.

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder két szemközti élpárja merőleges, akkor a harmadik szemközti élpár is merőleges.

3. Bizonyítsd be, hogy ha AB átvihető egy P pont körüli forgatva nyújtással az $A'B'$ szakaszba, akkor az AA' szakasz is átvihető a BB' szakaszba egy P pont körüli forgatva nyújtással.

4. (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges A, B, C és D síkbeli pontok esetén $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$.

Versenyfeladatok

1. Az $ABCDEF$ konvex hatszögben $A\sphericalangle + C\sphericalangle + E\sphericalangle = 360°$ és $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Bizonyítsuk be, hogy $AC \cdot BD \cdot EF = AE \cdot DF \cdot BC$.

2. Egy $n \times n$-es táblázat ki van töltve egész számokkal ügy, hogy az élszomszédos mezőkben lévő számok különbsége legfeljebb 1. Bizonyítsd be, hogy a táblázatban szerepel n egyforma szám.

3. Egy téglalap alakú táblázatban minden mezőbe egy valós szám van írva olyan módon, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege egész. Bizonyítsuk be, hogy minden egyes, a táblázatban szereplő számot lehet kerekíteni felfelé vagy lefelé úgy, hogy az eredményül kapott, egészekből álló táblázatban minden sorösszeg és oszlopösszeg ugyanannyi legyen, mint eredetileg volt.

4. Adott egy P pont és két kör a síkon. Szerkesztendő egy olyan egyenes a P ponton keresztül, melyek egyforma hosszú húrokat metszenek ki a két körből.

5. Adott néhány négyzet, melyek összterülete 1 egység. Bizonyítsd be, hogy el lehet helyezni őket egy két egység oldalhosszúságú négyzetben (átfedés nélkül).

6. Keressük meg az összes pozitív egész k számot, melyhez lehet találni egy n egész számot úgy, hogy $k = d(n^2)/d(n)$ (ahol $d(n)$ az n szám osztóinak számát jelöli).