Olimpiai iskola, 2026. október 23: vegyes feladatok

1. Egy konvex n-szöget felbontunk az átlóival háromszögekre. Egy háromszöget pirosra színezünk, ha nincs közös oldala a sokszöggel, és zöldre színezünk, ha két közös oldala van a sokszöggel. Bizonyítandó, hogy kettővel több zöld háromszög van, mint piros.

2. Két egymást követő köbszám különbsége négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy a négyzetszám alapja felírható két négyzetszám összegeként.

3. Legyen $n \geq 1$ pozitív egész szám. Hányféle módon lehet a $(0,0)$, $(n,0)$, $(n,1)$ és $(0,1)$ csúcsokkal rendelkező téglalapot $2n$ darab rácsháromszögre bontani?

4. a. A k kör AB és CD húrja merőleges egymásra, és a P pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4r^2$ (ahol r a kör sugarát jelöli).
b. Adott a k körben az AB, CD és EF húr, melyek egymással páronként 60°-os szöget zárnak be, és mind átmennek a P ponton. Bizonyítsd be, hogy

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 + EP^2 + FP^2 = 6r^2.$$

5. Egy $n \times n$-es táblázat ki van töltve egész számokkal úgy, hogy az élszomszédos mezőkben lévő számok különbsége legfeljebb 1. Bizonyítsd be, hogy a táblázatban szerepel n egyforma szám.

6. Egy téglalap alakú táblázatban minden mezőbe egy valós szám van írva olyan módon, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege egész. Bizonyítsuk be, hogy minden egyes, a táblázatban szereplő számot lehet kerekíteni felfelé vagy lefelé úgy, hogy az eredményül kapott, egészekből álló táblázatban minden sorösszeg és oszlopösszeg ugyanannyi legyen, mint eredetileg volt.

7. Keressük meg az összes pozitív egész k számot, melyhez lehet találni egy n egész számot úgy, hogy $k = d(n^2)/d(n)$ (ahol $d(n)$ az n szám osztóinak számát jelöli).

Olimpiai iskola, október 23: vegyes feladatok

1. Egy konvex n-szöget felbontunk az átlóival háromszögekre. Egy háromszöget pirosra színezünk, ha nincs közös oldala a sokszöggel, és zöldre színezünk, ha két közös oldala van a sokszöggel. Bizonyítandó, hogy kettővel több zöld háromszög van, mint piros.

2. Két egymást követő köbszám különbsége négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy a négyzetszám alapja felírható két négyzetszám összegeként.

3. Legyen $n \geq 1$ pozitív egész szám. Hányféle módon lehet a $(0,0)$, $(n,0)$, $(n,1)$ és $(0,1)$ csúcsokkal rendelkező téglalapot $2n$ darab rácsháromszögre bontani?

4. a. A k kör AB és CD húrja merőleges egymásra, és a P pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4r^2$ (ahol r a kör sugarát jelöli).
   b. Adott a k körben az AB, CD és EF húr, melyek egymással páronként 60°-os szöget zárnak be, és mind átmennek a P ponton. Bizonyítsd be, hogy

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 + EP^2 + FP^2 = 6r^2.$$

5. Egy $n \times n$-es táblázat ki van töltve egész számokkal ügy, hogy az élszomszédos mezőkben lévő számok különbsége legfeljebb 1. Bizonyítsd be, hogy a táblázatban szerepel n egyforma szám.

6. Egy téglalap alakú táblázatban minden mezőbe egy valós szám van írva olyan módon, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege egész. Bizonyítsuk be, hogy minden egyes, a táblázatban szereplő számot lehet kerekíteni felfelé vagy lefelé úgy, hogy az eredményül kapott, egészekből álló táblázatban minden sorösszeg és oszlopösszeg ugyanannyi legyen, mint eredetileg volt.

7. Keressük meg az összes pozitív egész k számot, melyhez lehet találni egy n egész számot úgy, hogy $k = d(n^2)/d(n)$ (ahol $d(n)$ az n szám osztóinak számát jelöli).