Teljes indukció

Kovács Benedek foglalkozása

Feladatok

F/1. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

F/2. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre a $2^{2^n} - 1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

F/3. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$.

F/4. Vegyünk egy $n \geq 4$ oldalú konvex sokszöget, mely néhány átlója mentén háromszögekre van osztva. Egy háromszöget fessünk pirosra, ha 2 olyan oldala van, ami az eredeti sokszögnek is oldala, és zöldre, ha 0 ilyen oldala van. Bizonyítsuk be, hogy 2-vel több piros háromszög van, mint zöld.

F/5. Tekintsük az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz összes olyan H részhalmazát, melyben nincs két 1 különbségű elem. Legyen $s(H)$ a H elemeinek szorzatának négyzete. Mennyi az összes ilyen H-ra nézve az $s(H)$ értékek összege? (Az üres halmaz elemeinek szorzata 1.)

F/6. Egy kör alakú pálya mentén van n autó. A pályán egy irányba lehet haladni. Az autók tankjában összesen annyi benzin van, amennyivel 1-szer körbe lehet menni a pályán. Bizonyítsuk be, hogy van olyan autó, mellyel megtehetünk egy teljes kört a pályán úgy, hogy a többi álló autóból (amikor odaérünk) begyűjthetjük a benzint.

F/7. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre léteznek páronként relatív prím, 1-nél nagyobb $k_0, k_1, ..., k_n$ egészek úgy, hogy $k_0k_1...k_n - 1$ megegyezik két szomszédos egész szorzatával.

F/8. Egy $m \times n$-es táblázat celláiba csupa különböző pozitív egészeket írtunk. Minden sorban kiszínezzük a p db legnagyobb számot pirosra, és minden oszlopban kiszínezzük a k db legnagyobb számot kékre. Lássuk be, hogy legalább pk darab lila mező lett.

F/9. Egy szobában n lámpa van, és bizonyos lámpapárok vezetékkel vannak összekötve. Kezdetben minden lámpa le van kapcsolva. Minden lámpán van egy gomb. Ha a gombot megnyomjuk, akkor az adott lámpának, és minden közvetlenül hozzákötött lámpának is megváltozik az állapota. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan sorozata a gombnyomásoknak, mellyel minden lámpa felkapcsolt állapotba kerül!

F/10. (Válogató 2021/1/3.) Egy szabályos 100-szög 41 csúcsát kékre, a maradék 59 csúcsát pedig pirosra színezzük. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik 24 konvex négyszög, Q_1, Q_2, ..., Q_{24}, amiknek a csúcsai a 100-szög csúcsai közül kerülnek ki, úgy, hogy a Q_1, ..., Q_{24} négyszögek (csúcsaikat, oldalaikat és belsejüket is beleértve) páronként diszjunktak, továbbá minden Q_i négyszögnek pontosan 3 csúcsa egyszínű, a negyedik csúcsa pedig más színű.

F/11. (IMO 2009/6.) Legyenek a_1, a_2, ..., a_n páronként különböző pozitív egészek, és legyen M egy olyan, pozitív egészekből álló, $n - 1$ elemű halmaz, ami nem tartalmazza az $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ számot. Egy szöcske a számegyenesen ugrál a 0 pontból kiindulva úgy, hogy n ugrást hajt végre jobbra, melyek hossza a_1, a_2, ..., a_n valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy a szöcske meg tudja választani az ugrások sorrendjét úgy, hogy ne ugorjon az M halmaz egyik elemére se.

2026. október 21.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)