Sorozatok

Borbényi Marci

2026. október 23.

Feladatok

1. Legyen $b_1 = 1$, és $b_{n+1} = \frac{b_n}{1+b_n}$ minden $n \geq 1$ esetén. Adj explicit képletet b_n-re.

2. Legyen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ függvény úgy, hogy $f(0,0) = 2$, $f(m+1,n) = f(m,n)+m$ és $f(m,n+1) = f(m,n)-n$ minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén. Sorold fel azon (p,q) párokat, amikre $f(p,q) = 2024$.

3. Legyen $a_0 = 3,\ a_1 = 4$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = a_{n-1}^2 - na_n$. Találj explicit képletet a sorozatra.

4. Legyen x_n valós számokból álló sorozat úgy, hogy

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$n = 3, 4, \ldots$ esetén. Mik azon (x_1, x_2) párok, amikre végtelen sok n esetén $x_n \in \mathbb{Z}$?

5. Legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ és $b_0, b_1, b_2, \ldots$ valós számok két végtelen sorozata, melyekre $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ és

$$a_{k+1} = b_k, \quad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

teljesül minden $k \geq 0$ egészre. Bizonyítsd be, hogy $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

6. Legyen $x_0 = a,\ x_1 = b$, és

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Bizonyítsd be, hogy ha a sorozat periodikus, akkor $ab = 1$.

7. Legyen $a_1 = 2$, illetve

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Találj explicit formulát a_n-re.

8. Legyen a_n pozitív számok szigorúan növő sorozata úgy, hogy

$$a_{n+2} = (a_{n+1} - a_n)^{\sqrt{n}} + n^{-\sqrt{n}}.$$

Bizonyítsd be, hogy az a_n sorozat nem korlátos.

9. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valósakból álló sorozat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok n-re $1 + a_n > \sqrt[n]{2}a_{n-1}$.

10. Egy $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ végtelen sorozat esetén jelölje $\Delta\underline{a}$ a differenciasorozatot, azaz

$$\Delta\underline{a} = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots).$$

Tegyük fel, hogy $\Delta(\Delta\underline{a})$ a konstans 1 sorozat, és $a_{19} = a_{92} = 0$. Mennyi a_1 értéke?

11. Pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot *jó*nak nevezünk, ha
a) a_1 négyzetszám;
b) minden $n \geq 2$ esetén a_n az a legkisebb pozitív egész, amire

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy minden jó sorozatra létezik k úgy, hogy $a_n = a_k$ minden $n \geq k$ esetén.

Kiegészítő feladatok

12. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$. Számítsd ki az

$$f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$

összeg értékét.

13. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 2 \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{na_n^2}{na_n^2 - (n+1)a_n + n + 1}, \text{ ha } n \geq 2.$$

Igazold, hogy

$$a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

bármely $n \geq 1$ esetén.

14. Legyen $x_1 = 2$ és $n \geq 1$ esetén $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$. Bizonyítsd be, hogy

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$

15. Legyen $a_0 = 1$, és

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy
a) a_n pozitív egész minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;
b) $a_n a_{n+1} - 1$ négyzetszám.

16. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ egy 1-nél nagyobb pozitív egészekből álló végtelen sorozat. Tegyük fel, hogy minden pozitív egész n-re az a_{n+1} szám a legkisebb olyan, a_n-nél nagyobb pozitív egész, amelyre $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan T és L pozitív egészek, amelyekre

$$a_{n+T} = a_n + L$$

teljesül minden pozitív egész n-re.