Olimpiai Iskola, 2026. október 24.

Amit talán már ismersz:

1. Igazoljuk, ha az 1, 2, ..., 100 számok közül kiválasztunk 51-et, akkor lesz köztük kettő, amelyek relatív prímek.

2. Igazoljuk, ha az 1, 2, ..., 100 számok közül kiválasztunk 51-et, akkor lesz köztük kettő úgy, hogy a kisebb osztja a negyobbat.

3. Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, ..., a_{100} egészek közül kiválasztható néhány úgy, hogy ezek összege osztható 100-zal.

4. Egy horgász fogott néhány halat. A három legnagyobb halat, melyek a kifogott halmennyiség tömegének 35%-át tették ki, a hűtőbe helyezte. A megmaradt rész tömegének $\frac{5}{13}$ -át jelentette a három legkisebb hal, melyeket a macskáknak adott. A többiből finom halászlevet főztek. Hány halat fogott a horgász?

5. Az egységnégyzetben kijelöltünk 51 pontot. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük három, amelyeket le tudunk takarni egy 1/7 sugarú körrel

Ezek között lehetnek újdonságok:

6. Gombóc Artúr 77 napig készül a csokievők intergalaktikus bajnokságára. Ha egy napon megkezd egy tábla csokit, azt aznap meg is eszi. Minden napon megeszik legalább egy tábla csokit, de összesen a 77 nap alatt legfeljebb 132 táblányit. Igazoljuk, hogy kiválasztható néhány egymást követő nap, amelyeken összesen éppen 21 csokit eszik meg.

7. (a) Igazoljuk, hogy bárhogy is áll egymás mellé öt ember, akiknek a magassága páronként különböző, kiválasztható közülük 3, akik éppen tornasorban állnak. (Azaz éppen növekvő, vagy csökkenő sorrendben vannak.) (b) Legalább hány embernek kell egymás mellett állnia ahhoz, hogy 4 kiválasztásában is biztosak lehessünk?

8. Igazoljuk, hogy a Fibonacci sorozatnak végtelen sok eleme végződik 55-re.

9. Igazoljuk, hogy minden számnak van olyan többese, amiben néhány 1-es jegy után vakahány 0 jegy áll.

10. Igazoljuk, hogy minden n számnak van olyan többese, amelyben a jegyek összege éppen n.

11. Igaz-e, hogy ha az 5 nem osztja az n számot, akkor van olyan többese, amelynek minden jegye 1 vagy 2?