Olimpiai Iskola, 2026. október 22.

1. Mi is az a pont körre vonatkozó hatvány? Az alábbi feladatsor erre épülő bevezetés.

2. Adott a k_1 és k_2 kör. Hol vannak azok a P pontok, amelyekre $k_1(P) = k_2(P)$? Mi ennek a következménye, ha három kört vizsgálunk?

3. Két egymást A-ban érintő kör közös A-beli érintőjének egy P pontjából húzunk a két körhöz egy egy szelőt. Igazoljuk, hogy a négy metszéspont egy körön van.

4. Apollonius féle feladatok: a $\{pont, egyenes, kor\}$ alakzatok közül adott három. Szerkesszünk olyan kört, aminek minhárommal egy közös pontja van. Az alakzatokat a továbbiakban a kezdőbetűjükkel jelöljük. Szerkesszük meg a ppe, ppk, pke, pkk, kke eseteket.

5. Legyen AB a Γ kör egy húrja, és ω_1 egy kör, ami érinti AB-t és Γ-t rendre a P_1 és Q_1 pontokban, illetve ω_2 ugyanígy a P_2 és Q_2 érintési pontokkal. A két kör középpontja az AB egyenes azonos oldalán van. Bizonyítsd be, hogy $P_1P_2Q_1Q_2$ egy körön vannak.

6. Az ABC háromszögben a B-ből induló magasság P-ben és Q-ban metszi AC Thálesz-körét, míg a C-ből induló magasság R-ben és S-ben metszi AB Thálesz körét. Bizonyítsd be, hogy P, Q, R, S egy körön van.

7. ABC háromszög egy belső pontja P. A PA, PB és PC szakaszokon van rendre D, E és F. A PDE kör és az AB egyenes metszéspontjai G és H. A PEF kör és a BC egyenes metszéspontjai I és J. A PFD kör és a CA egyenes metszéspontjai K és L. Bizonyítsd be, hogy G, H, I, J, K, L egy körön van.

8. Az ABC háromszög köréírt körének középpontja O, valamint P egy tetszőleges pont a síkon. A BCP körhöz P-ben húzott érintő és a BC egyenes metszéspontja A'. Hasonlóan definiáljuk B'-t és C'-t is. Bizonyítsd be, hogy A', B' és C' egy egyenesen vannak, amely merőleges OP-ra.

9. ω_1 kör és ω_2 kör belülről érintik a Γ kört. ω_1 és ω_2 két metszéspontja A és B, külső hasonlósági (nagyítási) pontjuk H. A H-ból Γ-hoz húzott két érintő érintési pontja X és Y. Bizonyítsd be, hogy A, B, X, Y egy körön van.

10. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat megfelelően A_1, B_1 és C_1-ben érinti. Igazoljuk, hogy az AB_1C_1 háromszög B_1C_1-gyel párhuzamos középvonalának és a BA_1C_1 háromszög A_1C_1-gyel párhuzamos középvonalának metszéspontja rajta van az AB felező merőlegesén.

11. Az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai a BC, AC és AB oldalakon rendre D, E és F. Az AB és DE metszéspontja P, az AC és DF metszéspontja Q. Bizonyítsd be, hogy a PQ egyenese merőleges az ABC háromszög Euler-egyenesére.

12. P a sík egy pontja, ω_1 és ω_2 körök. A, B rendre a P-ből húzott érintési pontok ω_1-hez, míg C, D rendre a P-ből húzott érintési pontok ω_2-höz. $AB \cap CD = Q$. Bizonyítsd be, hogy PQ felezőpontja rajta van ω_1 és ω_2 hatványvonalán.

13. Az ABC hegyesszögű háromszögben M a BC felezőpontja, C merőleges vetülete AM-re P. Az ABP kör másodjára Q-ban metszi a BC oldalt. Legyen N az AQ szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $NB = NC$.

14. Legyen ABC egy háromszög, és legyen M és N az AB, illetve az AC oldal felezőpontja. Válasszuk meg a K és L pontokat a BMC, illetve a BNC háromszög belsejében úgy, hogy a K az ABL, az L pedig az $AKCP$ háromszög belsejébe essen. Tegyük fel, hogy $KBA\angle = ACL\angle$, $LBK\angle = LNC\angle$ és $LCK\angle = BMK\angle$. Legyen O az AKL háromszög köré írt kör középpontja. Bizonyítsuk be, hogy $OM = ON$. IMO 2026/2.