Invariánsok és monovariánsok

Kovács Benedek szakköre

Feladatok

F/1. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat egész számokkal kitöltve. Ha egy sorban vagy oszlopban a számok összege negatív, abban a sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk egyszerre a számok előjelét. Bizonyítsd be, hogy egy idő után minden sorban és oszlopban nemnegatív lesz a számok összege.

F/2. 100 szobában 2026 ember van valamilyen módon elosztva. Minden percben kijön egy szobából valaki és bemegy egy olyan szobába, ahol legalább annyi ember van, mint abban a szobában, ahonnan éppen kijött (vele együtt). Mutasd meg, hogy egy idő után az összes ember ugyanabba a szobába fog kerülni!

F/3. Jancsi bácsinak van egy kertje, amit 10×10 darab parcellára osztott. Kezdetben mindegyik parcella üres. Jancsi bácsi be szeretné füvesíteni az egész kertjét, egy olyan fűfajtával ami a következőket tudja:

- Ha egy parcella már füves, az füves is marad örökre.
- Ha egy parcellának legalább két oldalszomszédja füves már, akkor ebben a parcellában is megterem egy idő után a fű.

Jancsi bácsi a lehető legkevesebb parcellát akar saját kezűleg befüvesíteni (mert nagyon lusta). Mennyi a minimális számú parcella, amik befüvesítésével egy idő után az egész kert füves lesz?

F/4. Adott egy jobbra és felfelé végtelen négyzetrács. Kezdetben egy kavics található a bal alsó mezőn. Egy lépésben kiválasztunk egy mezőt, erről a mezőről egy kavics lekerül és a jobboldali és fenti szomszédos mezőkre pedig 1-1 kavics rákerül. Döntsük el, hogy ki lehet-e üríteni a tábla bal alsó 3×3 mezőjét, ha a játék során sosem kerülhet több kavics ugyanarra a mezőre!

F/5. Adott egy szabályos háromszög. Egy lépésben a háromszög egyik csúcsát letükrözhetjük egy másik csúcsára. Mutasd meg, hogy nem kaphatunk soha kisebb kerületű háromszöget, mint kezdetben.

F/6. Van négy derékszögű háromszögünk, melyek oldalhosszai 3, 4 és 5. Egy lépésben valamelyik háromszöget kettévághatjuk az átfogóhoz tartozó magasságnál. Bizonyítsuk be, hogy mindig marad két egybevágó háromszög.

2026. október 24.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)

Fleiner Zsigmond feladatsora alapján

F/7. Néhány követ helyezünk el egy végtelen (mindkét irányban kiterjedő) négyzetekből álló szalag mezőin, amelyeket az egész számok indexelnek. Egy mezőn több kő is lehet. Egy műveletsorozatot hajtunk végre, ahol minden egyes lépés az alábbi két típus egyike lehet:

(a) Vegyünk el egy követ mind az $n-1$, mind az n mezőről, és helyezzünk egy követ az $n+1$ mezőre.

(b) Vegyünk el két követ az n mezőről, és helyezzünk egy-egy követ az $n-2$ és $n+1$ mezőkre.

Bizonyítsuk be, hogy bármely ilyen műveletsorozat elvezet egy olyan helyzethez, amelyben nem lehet további lépéseket végrehajtani, továbbá hogy ez a helyzet független a műveletek sorrendjétől!

Nehéz feladatok

N/1. Adott egy véges egyszerű gráf, aminek minden foka páratlan. Kezdetben minden csúcsa fekete vagy fehér. Egy lépésben minden csúcs olyan színűre változik, amilyen színű a szomszédjainak többsége. Bizonyítsd be, hogy egy idő után minden csúcsnak vagy állandó marad, vagy minden lépésben változik a színe. (Azaz minden csúcs színe periodikus lesz 2 szerint.)

N/2. (RMM 2016 SL) Van kezdetben véges sok különböző pozitív egészünk. Egy lépésben az n és $n+1$ számokat egy darab $(n-2)$-re cserélhetjük, vagy az n és $n+4$ számokat egy darab $(n-1)$-re cserélhetjük. Létrehozhatók ismétlődő és nempozitív számok is a lépésekkel. Mi a legkisebb egész, ami megjelenhet egy ilyen lépéssorozat után?

N/3. (IMO 2021/5) Két mókus, Bozontos és Ugrálós, 2021 diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat 1-től 2021-ig, és ásott 2021 kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat 2021 egymást követő lépésben. A k-adik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k-adik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.

N/4. (IMO 1986/3) Egy szabályos ötszög minden csúcsához egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy az öt szám összege pozitív. Ha három egymást követő csúcshoz rendre x, y, z számokat rendeltük, és $y < 0$, akkor az x, y, z számokat rendre $x+y$, $-y$, $z+y$-re cserélhetjük. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg legalább egy szám negatív.

Döntsük el, hogy csinálhatjuk-e ezt a folyamatot végtelen ideig!

N/5. ** Van n kikapcsolt lámpánk. Egy lépésben kidobhatunk egy kikapcsolt nem szélső lámpát, de ekkor a két szomszédját át kell kapcsolnunk. Milyen n-re érhető el, hogy csak 2 lámpa maradjon?
Segítség: Az invariánst egy szokatlan struktúrában keressük!

2026. október 24.
Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Fleiner Zsigmond feladatsora alapján