

Feladatok (2026. szept. 10. csütörtök délután)

- 1.** Egy polinom minden együtthatója 0, 1 vagy -1 . Biz. be, hogy minden gyöke kisebb, mint 2.
- 2.** Adott egy $P(x)$ egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha léteznek olyan a, b egészek, melyekre $|P(a)| = |P(b)| = 1$, továbbá $|a - b| \geq 3$, akkor a polinomnak nincs egész gyöke.
- 3.** Van-e olyan negyedfokú, egész együtthatós polinom, amelynek két különböző valós gyöke van, melyek közül az egyik racionális, míg a másik irracionális?
- 4.** Hányféleképpen lehet az $x^6 + 1$ polinomot két kisebb fokú, valós együtthatós főpolinom szorzatára bontani? *(Főpolinom: olyan polinom, amelynek főegyütthatója 1.)*
- 5.** a) Mutass olyan harmadfokú, tehát $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú függvényt, amelyre teljesül, hogy a, b, c, d nem mind egész számok, de f mégis minden egész x -hez egész számot rendel értékül.
 b) Keresz olyan példát, ahol $|a|$ a lehető legkisebb ($a \neq 0$, különben nem lenne harmadfokú).
 c) Mit tudsz mondani az ilyen tulajdonságú n -edfokú polinomokról?
- 6.** Az n -edfokú p polinomra teljesül, hogy $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 4$, $p(3) = 8, \dots$, $p(n) = 2^n$. Határozzuk meg $p(n+1)$ értékét.
- 7.** Két játékos, Ali és Bea azt játssza, hogy az alábbi polinom még hiányzó együtthatóinak helyére

$$x^{10} + \dots x^9 + \dots x^8 + \dots x^7 + \dots x^6 + \dots x^5 + \dots x^4 + \dots x^3 + \dots x^2 + \dots x^1 + 1$$

felváltva írnak be egy-egy valós számot (tetszésük szerint választva a még szabad helyek közül). Ali kezd, és akkor nyer, ha a kapott polinomnak nincs valós gyöke. Egyébként Bea nyer. Kinek van nyerő stratégiája?

- 8.** Mielőtt belevetette magát a gömbi geometria tanulmányozásába, Kolumbusz Kristóf a π -vel való számolást gyakorolta. Először felírta a füzetébe a π -t (nem tizedestört alakban, hanem a görög betűvel). Ezután felírt a füzetébe még újabb számokat is, a következő szabályok szerint:

- (1) Ha egy szám már szerepelt a füzetében, akkor felírhatta a kétszeresét, az ellentettjét és a reciprokát.
 (2) Ha két szám szerepelt a füzetében, akkor felírhatta az összegüket is.
 (3) Ha egy szám már szerepel, azt másféle alakjába is átírhatta, így például ha $\frac{1}{\pi + \frac{1}{\pi}}$ már szerepelt,

akkor felírhatta ezt is: $\frac{\pi}{\pi^2 + 1}$; hiszen $\frac{1}{\pi + \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\frac{\pi^2 + 1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi^2 + 1}$.

A $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \dots, \pi^{1492}$ számok közül legfeljebb hányat írhatott fel a füzetébe?

- 9.** Igaz-e a következő állítás? Ha egy (valós együtthatós, egyváltozós) f polinomra $f(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $f = g^2 + h^2$ valamilyen g, h valós együtthatós polinomokra.

- 10*.** Vannak-e olyan $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyekre az $f(x)^3 - g(x)^2$ polinom elsőfokú?

(Kürschák 2017/2. „a második feladatra nem csak megoldás, de még értékelhető részeredmény sem érkezett.”)