

**Feladatok (2026. szept. 11. péntek délután)**

**1.** Keressük meg az alábbi polinomok összes valós gyökét.

$$\text{a) } f(x) = x^5 - x \quad \text{b) } g(x) = x^4 - 4x^2 - 1 \quad \text{c) } h(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

**2.** Az  $f(x) = 6x^5 - 37x^4 + 59x^3 - 54x^2 + 94x + 40$  polinomnak három gyöke van:  $\frac{5}{2}, 4, -\frac{1}{3}$ .

Határozd meg ez alapján a következő polinomok gyökeit:

$$\text{a) } g(x) = 6x^5 + 37x^4 + 59x^3 + 54x^2 + 94x - 40 \quad \text{b) } h(x) = 40x^5 + 94x^4 - 54x^3 + 59x^2 - 37x + 6$$

**3.** Bizonyítsd be, hogy ha az  $x, y, z$  valós számokra teljesül, hogy  $xyz$ ,  $xy + yz + zx$  és  $x + y + z$  egyaránt pozitív számok, akkor  $x, y$  és  $z$  egyenként is pozitív. *(Nem szeretnék esetszétválasztást!)*

**4.** Egy polinom minden együtthatója 0, 1 vagy  $-1$ . **a)** Biz. be, hogy minden gyöke kisebb, mint 2. **b)** Lehet-e  $\frac{1}{2}$ -nél kisebb abszolútértékű gyöke?

**5.** **a)** Hányféleképpen lehet az  $x^4 + 1$  polinomot két kisebb fokú, valós együtthatós főpolinom szorzatára bontani? **b)** És az  $x^6 + 1$  polinomot? *(Főpolinom: olyan polinom, amelynek főegyütthatója 1.)*

**6.** Adott egy  $P(x)$  egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha léteznek olyan  $a, b$  egészek, melyekre  $|P(a)| = |P(b)| = 1$ , továbbá  $|a - b| \geq 3$ , akkor a polinomnak nincs egész gyöke.

**7.** Van-e olyan negyedfokú, egész együtthatós polinom, amelynek két különböző valós gyöke van, melyek közül az egyik racionális, míg a másik irracionális?

**8.** **a)** Mutass olyan harmadfokú, tehát  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  alakú függvényt, amelyre teljesül, hogy  $a, b, c, d$  nem mind egész számok, de  $f$  mégis minden egész  $x$ -hez egész számot rendel értékül.

**b)** Keress olyan példát, ahol  $|a|$  a lehető legkisebb ( $a \neq 0$ , különben nem lenne harmadfokú).

**9.** Az  $n$ -edfokú  $p$  polinomra teljesül, hogy  $p(0) = 1$ ,  $p(1) = 2$ ,  $p(2) = 4$ ,  $p(3) = 8, \dots$ ,  $p(n) = 2^n$ . Határozzuk meg  $p(n+1)$  értékét.

**10.** Van-e olyan egész együtthatós  $f$  polinom és hozzá  $a, b, c$  különböző egész számok, amelyekre  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$  és  $f(c) = a$ ?

**11\*.** Mielőtt belevetette magát a gömbi geometria tanulmányozásába, Kolumbusz Kristóf a  $\pi$ -vel való számolást gyakorolta. Először felírta a füzetébe a  $\pi$ -t (nem tizedestört alakban, hanem a görög betűvel). Ezután felírt a füzetébe még újabb számokat is, a következő szabályok szerint:

(1) Ha egy szám már szerepelt a füzetében, akkor felírhatta a kétszeresét, az ellentettjét és a reciprokát.

(2) Ha két szám szerepelt a füzetében, akkor felírhatta az összegüket is.

(3) Ha egy szám már szerepel, azt másféle alakjába is átírhatta, így például ha  $\frac{1}{\pi + \frac{1}{\pi}}$  már szerepelt,

akkor felírhatta ezt is:  $\frac{\pi}{\pi^2 + 1}$ ; hiszen  $\frac{1}{\pi + \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\frac{\pi^2 + 1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi^2 + 1}$ .

A  $\pi^2, \pi^3, \pi^4, \dots, \pi^{1492}$  számok közül legfeljebb hányat írhatott fel a füzetébe?