

Olimpiai Iskola, 2026. szeptember 10-12.

1. Melyik a legkisebb pozitív egész aminek hatszor annyi hattal osztható osztója van, mint hattal nem osztható?

2. OKTV 2007/08 II.kat. 1/3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

3. Határozzuk meg, mely a egész számokra igaz:

$$a^{2026} + a^{2025} + a^{2024} + \dots + a^2 + a + 202520262027 = 0$$

4. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 2(a - b)(1 - ab) = 4(1 + ab)$$

5. (a) Kürschák 31/1. Legyen p 2-nél nagyobb törzsszám. Bizonyítandó, hogy $\frac{2}{p}$ egy és csakis egyféleképpen írható $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ alakban, ahol x és y egymástól különböző pozitív egész számok. (b) Legyen p és q két különböző prím. Keressük $\frac{1}{pq} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pozitív egész megoldásait.

6. Keressük meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek oldalai egészek és kerületük és területük mérőszáma egyenlő.

7. Határozzuk meg, mely pozitív egész a , b és c számokra igaz:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 11.$$

8. Határozzuk meg, mely x és y egész számokra igaz:

$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2.$$

9. Határozzuk meg, mely a és b nemnegatív egész számokra igaz:

$$(ab - 7)^2 = a^2 + b^2.$$

10. Határozzuk meg, mely x és y egész számokra igaz:

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$

11. Határozzuk meg, mely pozitív egész a és b számokra igaz:

$$a^3 - b^3 = ab + 61.$$

12. IMO 92/1. Határozzuk meg az összes olyan a , b és c egész számot, amelyekre $1 < a < b < c$ és $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ osztója $abc - 1$ -nek.