

Olimpiai szakkör 2026. szeptember 18.

1. Egérkének van 25 darab sajtja. Az egyiket szeretné úgy kettévágni, hogy utána fel tudjon tenni 13-13 darabot egy kétkarú mérlegre úgy, hogy egyensúlyban legyen. Segítsünk neki!
2. Valaki felírt a táblára 2026, nem feltétlenül különböző, 1-nél nagyobb egész számot. Konfuciusz minden lépésben kiválaszt két egész számot, $m > 1$ -et és $n > 1$ -et két különböző helyről a táblán, és ezt a két számot kicseréli a $\gcd(m, n)$ és $\text{lcm}(m, n)$ számokra. Ezt a lépést addig ismétli, amíg csak lehetséges.
(a) Bizonyítsuk be, hogy – függetlenül Konfuciusz választásaitól – véges sok lépés után pontosan egy olyan M egész szám marad a táblán, amely nagyobb 1-nél. (b) Bizonyítsuk be, hogy az M értéke nem függ Konfuciusz választásaitól. (Megjegyzés: $\gcd(x, y)$ az x és y pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját, $\text{lcm}(x, y)$ pedig az x és y legkisebb közös többszörösét jelöli.) IMO 2026/1.
3. Volt két testvér s kettejüknek egy birkanyája. Eladták a birkákat és mindegyikért pont annyi tallért kaptak, ahány birka volt a nyájban. A kapott pénzt így osztották el: először az idősebb vett el magának 10 tallért, aztán a fiatalabb, aztán megint az idősebb és így tovább felváltva. Utoljára a fiatalabb következett, aki szomorkodva látta, hogy már csak tíznél kevesebb tallér maradt, ezeket elvette. Hogy igazságos legyen az osztozkodás, az idősebb a bicskáját a fiatalabbnak adta. Hány tallért ér a bicska?
4. Sanyi és Móri játszik. Legyen $0^\circ < \theta < 180^\circ$ adott szög, amit mindkét játékos ismer. Kezdekor Sanyi papírból készít egy T háromszöget, amelynek méreteit ő választja meg. Ezután a következő lépést ismételtetik:
 - Ha T -nek van legalább egy, pontosan θ nagyságú szöge, akkor a játék véget ér, és Móri nyer.
 - Különben Móri választ a T területén egy, a három csúcstól különböző P pontot. Ezután a T háromszöget a P -től a T szemközti csúcsáig egy egyenes vágással két háromszögre vágja szét.
 - Sanyi eldobja az egyik háromszöget. A megmaradt háromszög lesz az új T .A θ mely valós értékei esetén tudja Móri biztosan megnyerni a játékot, bárhogyan is játszik Sanyi? IMO 2026/4.
5. (a) Bizonyítsuk be, hogy öt egymás utáni pozitív egész közül az egyik relatív prím a többihez. (b) Keressünk ötnél nagyobb számot, amire szintén igaz az állítás.
6. Legyen ABC egy háromszög, és legyen M és N az AB , illetve az AC oldal felezőpontja. Válasszuk meg a K és L pontokat a BMC , illetve a BNC háromszög belsejében úgy, hogy a K az ABL , az L pedig az AKC háromszög belsejébe essen. Tegyük fel, hogy $KBA \sphericalangle = ACL \sphericalangle$, $LBK \sphericalangle = LNC \sphericalangle$ és $LCK \sphericalangle = BMK \sphericalangle$. Legyen O az AKL háromszög köré írt kör középpontja. Bizonyítsuk be, hogy $OM = ON$. IMO 2026/2.