

4. IMO válogatóverseny

2026. április 24.

4. feladat. A *másodfokú pasziánsz* egy egyszemélyes játék. A játék elején a játékos kiválaszt két különböző nemnulla egész számot: a -t és b -t, és felírja a táblára az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletet. Egy lépésben, ha a táblán aktuálisan szereplő egyenletnek két különböző nemnulla egész gyöke van, amelyek $x_1 = u$ és $x_2 = v$, akkor a játékos letörli az egyenletet, és felírja helyette az $x^2 + ux + v = 0$ és $x^2 + vx + u = 0$ egyenletek közül az egyiket (eldöntheti, hogy melyiket). Ellenkező esetben, ha az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek nincs két különböző nemnulla egész gyöke, akkor a játék véget ér.

Határozzuk meg az összes olyan kezdeti (a, b) számpárt, amelyre a játékos képes végtelen sok lépésig játszani a másodfokú pasziánszt.

5. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB < AC$. Legyen Γ az ABC háromszög körülírt köre. A B -ből AC -re állított merőleges a Γ kört másodszor a $D \neq B$ pontban metszi. Legyen Q az a pont Γ -n, amelyre $Q \neq B$ és $AB = AQ$. Legyen a BQ és AC egyenesek metszéspontja R . A DR egyenes a Γ kört másodszor az $S \neq D$ pontban metszi. A BC szakasz a QRS háromszög körülírt körét T -ben metszi. Legyen a TQ és RS egyenesek metszéspontja X .

Bizonyítsuk be, hogy CX merőleges AB -re.

6. feladat. Béla egyszemélyes játékot játszik, amelyben kavicsokat kell pakolni egy 1000 sorból és 1000 oszlopból álló táblára. Kezdetben a tábla minden mezője üres. Egy lépésben Béla kiválaszt egy olyan sort vagy oszlopot, amelyben a kavicsok addigi darabszáma 3-mal osztható, majd kiválaszt egy üres mezőt ebben a sorban vagy oszlopban, és ráhelyez egy új kavicsot. Ha nincs sem olyan sor, sem olyan oszlop, amelyet Béla kiválaszthatna, akkor a játék véget ér.

Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány kavicsot helyezhet el Béla a táblán a játék során.

A feladatok titkosak a 2026-os IMO végéig, ezért azokat nem szabad másoknak megmutatni vagy az interneten megosztani.