

3. IMO válogatóverseny

2026. április 23.

1. feladat. Legyen $n \geq 2$ pozitív egész. Egy $n \times n$ -es táblázatban minden $1 \leq i \leq n$ -re és $1 \leq j \leq n$ -re, az alulról számított i -edik sor balról számított j -edik mezője $\text{lnko}(i, j)$ darab eukaliptusz levelet tartalmaz. Egy koala a bal alsó sarokmezőből indulva elsétál a jobb felső sarokmezőbe. A koala minden lépésben felfelé vagy jobbra lép egy mezőnyit a táblázatban. A koala elmajszolja a meglátogatott mezőkben lévő összes eukaliptusz levelet, beleértve a bal alsó és a jobb felső sarokmezőkben lévőket is.

Határozzuk meg n függvényében, hogy legfeljebb hány eukaliptusz levelet ehethet meg útja során a koala.

($\text{lnko}(x, y)$ az x és y egész számok legnagyobb közös osztóját jelöli.)

2. feladat. Jelölje $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ a nemnegatív egész számok halmazát. Legyen $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ felülről nem korlátos függvény, amelyre teljesül az alábbi állítás: bármely m és n nemnegatív egészekre, ha

$$f(m+n) = \max \{f(0), f(1), \dots, f(m+n)\},$$

akkor

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Mutassuk meg, hogy léteznek olyan A, B, C és D pozitív egészek, amelyekre minden n nemnegatív egész esetén $f(An+B) = Cn+D$.

(Az f függvény *felülről nem korlátos*, ha minden N nemnegatív egészhez létezik n nemnegatív egész, amelyre $f(n) \geq N$.)

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $\angle ADC > 90^\circ$. Tegyük fel, hogy X és Y olyan pontok az AC átlón, amelyekre

$$\angle ADX = \angle YDC = 90^\circ, \quad \angle CAD = \angle CBX, \quad \text{és} \quad \angle DCA = \angle YBA.$$

A BXY háromszög körülírt körének középpontja legyen O . Tegyük fel, hogy R olyan, O -tól különböző pont az AC szakasz felezőmerőlegesén, amelyre az OR és AC egyenesek párhuzamosak.

Mutassuk meg, hogy az RO egyenes felezi a $\angle DRB$ szöget.

A feladatok titkosak a 2026-os IMO végéig, ezért azokat nem szabad másoknak megmutatni vagy az interneten megosztani.