

1. Az ABC háromszögben az A csúcsnál tompaszög van. Legyenek D és E rendre az AB és AC szakaszok olyan pontjai, amelyekre $BDEC$ húrnégyszög. Tegyük fel, hogy az ADE háromszög köré írt kör a BC szakaszt az X és Y pontokban metszi, ahol a pontok sorrendje B, X, Y és C . A BDX és CEY háromszögek köré írt körei legyenek rendre Ω és Γ . Legyen P olyan pont, hogy PD érinti Ω -t, PE pedig érinti Γ -t. Legyen Q olyan pont, amelyre QB érinti Ω -t, QC pedig érinti Γ -t.

Igazoljuk, hogy A, P és Q egy egyenesre illeszkednek.

2. Legyen $n \geq 3$ rögzített pozitív egész. A számegyenes $1, 2, \dots, n$ pontjain egy-egy karó áll. Kezdetben az egyik karóra egy varjút helyezünk, ami ezután az $[1, n]$ intervallum felett repked és időnként leszáll egy karóra az alábbi szabályt követve.

Ha a varjú a k pontban lévő karón van, akkor felszáll és jobbra indul (kivéve, ha $k=n$, amikor kénytelen balra indulni). Ha repülés közben az 1 vagy n pont fölé ér, akkor azonnal megfordul, és a másik irányba folytatja a repülést. Miután megtett k egységnyi távot a felszállás óta, leszáll arra a karóra, amihez ekkor érkezik.

A varjú ezt a tevékenységet a végtelenségig folytatja. Például ha $n=8$ és a varjú kezdetben a harmadik karón van, akkor a 3-ast követően a 6, 4, 8, 2, 4, ... számokon fog leszállni (ebben a sorrendben). Adott n -re egy karó szerencsés, ha a varjú mindenképpen leszáll rá legalább egyszer a kezdeti helyzetétől függetlenül.

Keressük meg mindazon $n \geq 3$ számokat, melyekre pontosan egy szerencsés karó van.

3. Jelölje $\mathbb{Z}^{>0}$ a pozitív egészek halmazát. Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{Z}^{>0} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre minden pozitív egész n -re és n -nek minden pozitív egész d osztójára létezik n -nek olyan pozitív egész w osztója, hogy $d + f(w)$ osztható n -nel.