

2025. november 21., péntek

1. Legyen ABC egy háromszög, és legyen D egy pont a háromszög belsejében. Legyen E egy D -től különböző pont az AD egyenesen. A BDE háromszög köréírt köre legyen ω_1 , a CDE háromszög köréírt köre legyen ω_2 . Az ω_1, ω_2 körök a BC oldalt rendre F -ben és G -ben metszik, ahol F, G a BC szakasz belső pontjai. A DG és AB egyenesek metszéspontja legyen X , a DF és AC egyenesek metszéspontja legyen Y . Lássuk be, hogy XY párhuzamos BC -vel.
2. Keresd meg az összes olyan $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, melyre

$$(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Az $\mathbb{R}^+$ a pozitív valósak halmazát jelöli.

3. Nevezzük *szónak* az A és B betűkből álló karaktersorozatokat. Anna egy oszlopban egymás alá leírta az összes n betűből álló szót. Ezután Béla minden v szó mellé odaírta a legrövidebb w szót, mely tartalmazza részsorozatként v összes legfeljebb $n-1$ hosszú részsorozatát és nem tartalmazza részsorozatként v -t. Ha nincs ilyen w , Béla nem írt le semmit. Hány betűt írt le összesen Béla?

Egy x szó akkor tartalmazza részsorozatként az y szót, ha x néhány (esetleg nulla) tetszőlegesen választott karakterét elhagyva y -t kapjuk.