**Olimpiai szakkör 2024. február 16.**

1. Az $a$, $b$, $c$ és $d$ egészek olyanok, hogy az $ac$, $bc + ad$, $bd$ mindegyike osztható az $n$ egésszel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc+ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók $n$-nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.
2. A $H = \{1; 2; 3; ...; 9\}$ halmaz egy $P$ partíciójának nevezzük azt, ha $H$-t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje $P(n)$ az $n$-t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ($n \in H$). Például a $P : \{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$ partíció esetén $P(6) = 5$. Bizonyítsuk be, hogy $H$ bármely $P_1$ és $P_2$ partíciójára található két különböző $H$-beli $n$ és $m$ elem, amelyekre $P_1(n) = P_1(m)$ és $P_2(n) = P_2(m)$.
3. Legyen $f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, ha $x \neq -3$ és $x \neq -2$. Határozzuk meg $f_{2010}(2011)$ értékét.
4. Jelölje az $\{1; 2; \dots; n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát $r_n$, amely nem tartalmaz szomszédos számokat, ahol az 1-et és az $n$-et is szomszédosnak tekintjük. Határozzuk meg $r_{16}$ értékét. Igazoljuk, hogy az $\{r_n\}$ sorozat hármas maradékai periódikusan ismétlődnek, ha $n \geq 2$ és határozzuk meg a sorozat periódusát.
5. Az $ABC$ háromszög köré írt körhöz $A$-ban és $B$-ben húzott érintők metszéspontja legyen $D$. Az $ABD$ háromszög köré írt köre az $AC$ egyenest és a $BC$ szakaszt másodszor rendre az $E$ és $F$ pontokban metszi. Legyen $CD$ és $BE$ metszéspontja $G$. Határozzuk meg a $BG : GE$ arányt, ha $BC : BF = 2 : 1$.