OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Teljes indukció

Kovács Benedek szakköre

Feladatok

F/1. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$.

F/2. Vegyünk egy $n \geq 4$ oldalú konvex sokszöget, mely néhány átlója mentén háromszögekre van osztva. Egy háromszöget fessünk feketére, ha 2 olyan oldala van, ami az eredeti sokszögnek is oldala, és szürkére, ha 0 ilyen oldala van. Bizonyítsuk be, hogy 2-vel több fekete háromszög van, mint szürke.

F/3. Egy kör alakú pálya mentén van n autó. A pályán egy irányba lehet haladni. Az autók tankjában összesen annyi benzin van, amennyivel 1-szer körbe lehet menni a pályán. Bizonyítsuk be, hogy van olyan autó, mellyel megtehetünk egy teljes kört a pályán úgy, hogy a többi álló autóból (amikor odaérünk) begyűjthetjük a benzint.

F/4. Tekintsük az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz összes olyan H részhalmazát, melyben nincs két 1 különbségű elem. Legyen $s(H)$ a H elemeinek szorzatának négyzete. Mennyi az összes ilyen H-ra nézve az $s(H)$ értékek összege?

F/5. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre léteznek páronként relatív prím, 1-nél nagyobb $k_0, k_1, ..., k_n$ egészek úgy, hogy $k_0 k_1 ... k_n - 1$ megegyezik két szomszédos egész szorzatával.

F/6. Egy $m \times n$-es táblázat celláiba csupa különböző pozitív egészeket írtunk. Minden sorban kiszínezzük a p db legnagyobb számot pirosra, és minden oszlopban kiszínezzük a k db legnagyobb számot kékre. Lássuk be, hogy legalább pk darab lila mező lett.

F/7. Egy konferencián n matematikus ebédel. Két terem van, melyekben úgy szeretnének leülni, hogy mindenki páros sok ismerősével üljön egy teremben. Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megoldható. (Az ismeretség kölcsönös.)

F/8. (IMO 2009/6.) Legyenek a_1, a_2, ..., a_n páronként különböző pozitív egészek, és legyen M egy olyan, pozitív egészekből álló, $n - 1$ elemű halmaz, ami nem tartalmazza az $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ számot. Egy szöcske a számegyenesen ugrál a 0 pontból kiindulva úgy, hogy n ugrást hajt végre jobbra, melyek hossza a_1, a_2, ..., a_n valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy a szöcske meg tudja választani az ugrások sorrendjét úgy, hogy ne ugorjon az M halmaz egyik elemére se.

2023. szeptember 30.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Házi feladatok

Beadási határidő: 2023. október 8. (vasárnap)

HF/1. Legyen minden $n \geq 1$-re F_n az n-edik Fibonacci-szám, azaz $F_1 = 1, F_2 = 1$ és $n \geq 3$ esetén $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$ egészre

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2.$$

HF/2. Mi a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás: Ha $a_1, a_2, ..., a_n$ egészek, akkor $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bizonyítás: n szerinti teljes indukciót használunk.

Alapeset: Ha $n = 1$, akkor az állítás nem mond semmit, így nyilvánvalóan igaz.

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy $n = k-1$-re igaz az állítás, és most bizonyítsuk be $n = k$-ra. Tekintsük az $a_1, a_2, ..., a_k$ számokat. Használjuk az indukciós feltevést az első $k-1$ számra, és az utolsó $k-1$ számra is. Tehát $a_1 = a_2 = ... = a_{k-1}$ és $a_2 = ... = a_{k-1} = a_k$. Ezeket összerakva: $a_1 = a_2 = ... = a_k$. $\square$

HF/3. Egy szobában n lámpa van, és bizonyos lámpapárok vezetékkel vannak összekötve. Kezdetben minden lámpa le van kapcsolva. Minden lámpán van egy gomb. Ha a gombot megnyomjuk, akkor az adott lámpának, és minden közvetlenül hozzákötött lámpának is megváltozik az állapota. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan sorozata a gombnyomásoknak, mellyel minden lámpa felkapcsolt állapotba kerül!

HF/4. Bizonyítsuk be, hogy minden G gráfra létezik egy 1 főegyütthatójú, a gráf csúcsszámával megegyező fokszámú p_G polinom, melyre minden $x \geq 1$ egészre $p_G(x)$ a G gráf csúcsainak x színnel való jó színezéseinek számával egyenlő. (Egy színezés jó, ha minden él két végpontja különböző színű. Az x db szín meg van különböztetve egymástól, és a színezésben nem kell feltétlenül mindegyik színt használni.)

2023. szeptember 30.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com