2022. július 11., hétfő

1. feladat Oslo bankja kétféle típusú érmét bocsát ki: alumíniumot (jele A) és bronzot (jele B). Mariann előtt n alumíniumérme és n bronzérme van egy sorban elrendezve valamilyen tetszőleges kezdeti sorrendben. *Lánc*nak nevezzük egymást közvetlenül követő, azonos típusú érmék tetszőleges sorozatát. Rögzített $k \leqslant 2n$ pozitív egész szám mellett Mariann ismételten végrehajtja a következő műveletet: meghatározza a leghosszabb olyan láncot, amely tartalmazza a balról számított k-adik érmét, és az ezen lánchoz tartozó összes érmét átteszi a sor bal szélére. Például, ha $n = 4$ és $k = 4$, akkor az $AABBBABA$ elrendezésből kiinduló folyamat:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Határozzuk meg mindazon, $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tulajdonságú (n, k) párokat, amelyekre minden kiindulási elrendezés esetén lesz olyan pillanat a folyamat során, hogy a balról számított első n érme mind azonos típusú.

2. feladat Jelölje $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmazát. Határozzuk meg mindazon $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényeket, amelyekre minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén pontosan egy olyan $y \in \mathbb{R}^+$ létezik, hogy

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

3. feladat Legyen k pozitív egész, és legyen S páratlan prímszámoknak egy véges halmaza. Bizonyítandó, hogy (elforgatástól és tükrözéstől eltekintve) legfeljebb egyféleképpen lehet az S elemeit egy kör mentén elrendezni úgy, hogy bármely két szomszédosnak a szorzata $x^2 + x + k$ alakú legyen valamilyen pozitív egész x-szel.

Language: Hungarian

Munkaidő: négy és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2022. július 12., kedd

4. feladat Legyen $ABCDE$ olyan konvex ötszög, hogy $BC = DE$. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ ötszög belsejében lévő T pontra $TB = TD$, $TC = TE$ és $\angle ABT = \angle TEA$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P, illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R, illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.

5. feladat Határozzuk meg mindazon, pozitív egészekből álló (a, b, p) számhármasokat, amelyekre p prím és

$$a^p = b! + p.$$

6. feladat Legyen n pozitív egész. *Skandináv négyzet* egy $n \times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2-ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint őbenne, akkor *völgy*nek nevezzük. *Kaptató* egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy

(i) a sorozat első mezője egy völgy,

(ii) a sorozat minden további mezője szomszédos az őt közvetlenül megelőző mezővel, és

(iii) a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak.

Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.

Language: Hungarian

Munkaidő: négy és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.