Olimpiai szakkör (2023. február 3.)
Számelmélet: mod p rend, LTE lemma

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n természetes számra teljesül $n \mid 2^n + 1$.

---

2. Legyenek $a, n \geq 2$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy $n \mid \varphi(a^n - 1)$. (Itt φ az Euler-féle fí-függvényt jelöli.)

3. Legyen $n \geq 1$ egész. Bizonyítsuk be, hogy $2^{2^n} + 1$ minden osztója $k \cdot 2^{n+1} + 1$ alakú valamilyen egész k-ra.

4. Igazoljuk, hogy egy p prímre és n pozitív egészre ha $p \mid\mid 2^n - 1$, akkor $p \mid\mid 2^{p-1} - 1$. (*Definíció:* Egy p prímre, valamint k pozitív egészre és a egészre $p^k \mid\mid a$ azt jelenti, hogy a prímtényezős felbontásában p kitevője pontosan k. Ezt úgy is szokták jelölni, hogy $v_p(a) = k$.)

5. (Lifting the Exponent lemma, főeset) Legyenek x és y egészek, $n \geq 1$ egész, és $p \geq 3$ prím, melyre $p \mid x - y$, de $p \nmid x$ és $p \nmid y$. Ekkor bizonyítsuk be, hogy $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$.

A Lifting the Exponent (LTE) lemma állítása: Legyenek x és y egészek, $n \geq 1$ egész, és p prím, melyre $p \nmid x$ és $p \nmid y$. Ekkor

- Ha p páratlan prím és $p \mid x - y$, akkor $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$.
- Ha p páratlan prím és $p \mid x + y$ és n páratlan, akkor $v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n)$.
- Ha $p = 2$ és $2 \mid x - y$ és n páros, akkor $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$.
- Ha $p = 2$ és $2 \mid x - y$ és n páratlan, akkor $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y)$.

6. Legyen k pozitív egész. Mely n pozitív egészekre lesz $3^k \mid 2^n - 1$?

7. Mely n pozitív egészekre léteznek x, y, k egészek úgy, hogy $(x, y) = 1$, $k > 1$ és $3^n = x^k + y^k$?

8. Mely $a, b \geq 2$ egészekre teljesül, hogy $b^a \mid a^b - 1$?

---

9. Legyen n pozitív egész és $p > n+1$ prím. Igazoljuk, hogy $p \mid 1^n + 2^n + ... + (p-1)^n$.

10. Minden p prímre adjunk q prímet, hogy ne létezzen a egész, melyre $q \mid a^p - p$.