Olimpiai szakkör 2023. január 20.

1. Van-e olyan $P(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $P(10)=400$, $P(14)=440$ és $P(18)=520$?
2. Az a,b,c pozitív számokra és az $n\geq 2$ egészre $a^n+b^n=c^n$. Mely k pozitív egészekre szerkeszthető az a^k,b^k,c^k oldalakkal tompaszögű háromszög?
3. Oldjuk meg az 1-nél nem nagyobb pozitív számok halmazán a következő egyenletet: $x/(1+y+zx)+y/(1+z+xy)+z/(1+x+yz)=3/(x+y+z)$.
4. Egy $n^2\times n^2$-es sakktábla mezőire pozitív egészeket írunk úgy, hogy két szomszédos mezőn *(van közös oldaluk)* levő szám különbségének az abszolút értéke nem nagyobb n-nél. Bizonyítsuk be, hogy legalább $[n/2]+1$ számú mezőn ugyanaz a szám áll.
5. Legyen $n>1$ tetszőleges és jelöljük k-val az n-nél nem nagyobb pozitív prímek számát. Tekintsünk $k+1$ darab olyan pozitív egészt, amelyek közül egyik sem osztója az összes többi szorzatának. Bizonyítsuk be, hogy a $k+1$ pozitív egész között van olyan, amely nagyobb, mint n.
6. Az x^4-2x^2+ax+b polinomnak négy különböző gyöke van a valós számok körében. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik gyök abszolút értéke kisebb, mint $\sqrt{3}$.
7. Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög minden oldala egész szám és a kerülete páratlan szám. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög területe legalább $\frac{\sqrt{3}}{4}$.