2022. október 14. Olimpiai szakkör

1. Robinson kiúszott a partra és ott talált egy cédulát, melyen ez állt: „A kókuszpálmától lépkedj el a sziklaoszlopig, számold a lépéseket, ott fordulj balra derékszögben és lépj ugyanannyit. Ez a pont legyen *X*. Menj vissza a kókuszpálmához és lépkedj el a forrásig, újra számold a lépéseket, fordulj jobbra derékszögben és lépj ugyanennyit. Ez a pont legyen *Y*. *X* és *Y* közt félúton ástuk el a kincset." Sajnos a kókuszpálmát kidönthette a vihar, a szikla és a forrás megvan. Segíts Robinsonnak megtalálni a kincset.

2. Egy négyszög oldalaira kifele négyzeteket rajzoltunk. Biz a szemköztiek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és merőlegesek.

3. A tér négy pontja A, B, C és D. Ha a tér minden X pontjára $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$, akkor $ABCD$ …..

4. Az ABC háromszög oldalaira kifele rajzoljuk a következő téglalapokat: ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Bizonyítsuk, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 felezőmerőlegesei egy ponton mennek át.

5. Biz. az ABC szab.Δ köréírt körének tetsz. P pontjára a $PA^n+PB^n+PC^n$ mindig uannyi, ha $n=2$, vagy 4.

6. (Euler tétele) Az $ABCD$ négyszög középvonalai MN és PQ, akkor $AC^2+BD^2=2MN^2+2PQ^2$.

7. Biz a tér tetsz. A, B, C és D pontjára (a) $AB^2+BC^2+CA^2\leq3(DA^2+DB^2+DC^2)$; (b) AB és CD akkor és csak akkor merőlegesek, ha $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

8. Az $ABCD$ húrnégyszög oldalfelezőpontjaiból merőlegeseket állítunk a szemközti oldalakra. Biz egy ponton mennek át ezek a vonalak.

9. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja P, $AB=AC=BD$. Az ABP Δ köré és beírt körének közepe O és I. Biz, ha O és I különbözőek, akkor OI és CD merőlegesek.

10. Az $ABCD$ húrnégyszög köréírt kör közepe O. Az AB és CD egyenesek metszéspontja M. Az ACM és BDM háromszögek köréírt köreinek közös pontjai M és N. Biz $MNO\angle=90°$.