Olimpiai szakkör, 2022. március 11.

(1) a) Felosztható-e az egész számok halmaza 5 tagú számtani sorozatokra úgy, hogy minden sorozat differenciája különböző legyen?
b) És úgy, hogy minden differencia $(1, 2, 3, 4, ...)$ pontosan egyszer forduljon elő?

(2) A sík összes pontját kiszíneztük 100 szín valamelyikével. Igaz-e, hogy mindenképpen keletkezett olyan téglalap, melynek mind a négy csúcsa egyszínű?

(3) Igaz-e, hogy a pozitív egész számokat 2 színnel színezve mindig keletkezik egyszínű végtelen számtani sorozat $(a,\ a+d,\ a+2d,\ ...)$?

(4) Legyen A egy halmaz, és $A_1, ..., A_n \subseteq A$ olyan részhalmazok, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re $|A_i| = k$ és $n < 2^{k-1}$. Bizonyítsuk be, hogy A elemei 2 színnel (pirossal és kékkel) színezhetők úgy, hogy minden A_i tartalmazzon piros és kék elemet is.

(5) A sík egész koordinátájú rácspontjain egy bolha ugrál. Tud-e úgy ugrálni, hogy minden rácspontban pontosan egyszer járjon, az ugrásainak a hossza pozitív egész szám legyen és minden pozitív egész pontosan egyszer forduljon elő az ugrások hosszai között?

(6) Igaz-e, hogy ha H és A a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor H legfeljebb egyféleképpen bontható fel A páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)

(7) Határozzzuk meg a legkisebb pozitív egész k számot, melyhez létezik a pozitív egészeknek $(\mathbb{Z}^+)$ egy k színnel való színezése és egy $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény, amely teljesíti a következő két feltételt:
(i) Minden azonos színű pozitív egész m, n esetén $f(m+n) = f(m) + f(n)$;
(ii) Léteznek olyan pozitív egész m, n számok, melyekre $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$ teljesül.
Az (i) és (ii) feltételekben az m, n számok nem feltétlenül különbözőek.