Olimpiai szakkör 2022. február 11.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg.

Dobos Sándor

1. Mutassuk meg, hogy 17 különböző természetes szám közül kiválasztható öt úgy, hogy vagy egyikük osztja a másik négy mindegyikét, vagy egyik sem osztja semelyik másikat.
2. Határozzuk meg az összes olyan egészekből álló $(a;b)$ párt, ahol $a \geq 1$, $b \geq 1$, amelyek kielégítik az $a^{b^2} = b^a$ egyenletet.
3. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló $(a;b)$ rendezett párt, amire (ab^2+b+7) osztója (a^2b+a+b)-nek.
4. Legyen i egy 1-nél nagyobb páratlan egész, k_1, k_2, …, k_n pedig adott egészek. Az 1,2,…, n számok mind az n! darab $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ permutációjára legyen $S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b \neq c$, és n! osztója $(S(b)-S(c))$-nek.
5. Milyen m egész esetén van olyan irracionális x, amire $x^{12}+mx$, x^3+2x^2 és x^2+x mindegyike egész?
6. Adott $n=13$ pozitív egész szám, egyiknek sincs $k=3$-nál nagyobb prímosztója. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük 3 úgy, hogy szorzatuk köbszám legyen. (b) Milyen számot írhatunk az n helyére, úgy hogy az állítás igaz legyen, ha $k=5$?