Olimpiai szakkör 2021. november 26.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online-ra váltó olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. A feladatok korábbi IMO-s példák.
Remélem az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket,
Dobos Sándor

1. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre $p(x)=x^2-10x-22$, ahol $p(x)$ a tízes számrendszerben felírt x szám számjegyeinek a szorzatát jelenti. IMO. 1968.2.
2. Állapítsuk meg a^2+b^2 lehető legkisebb értékét, ha a és b olyan valós számokat jelentenek, amelyekre az $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke. IMO 1973.3.
3. Legyenek x,y,z olyan nemnegatív számok, amelyekre $x+y+z=1$. Bizonyítandó, hogy $0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq 7/27$. IMO 1984.1.
4. Valamely síkbeli derékszögű koordináta-rendszer x tengelyével párhuzamos egyenest akkor nevezzük triangulárisnak, ha balról jobbra haladva olyan különböző A, B, C, D pontokban metszi az $y=x^4+px^3+qx^2+rx+s$ egyenletű görbét, hogy az AB, AC és AD szakaszok egy (valódi) háromszög oldalai lehetnek. Bizonyítsuk be, hogy az x tengellyel párhuzamos egyenesek közül a szóban forgó görbét négy különböző pontban metszőknek vagy mindegyike trianguláris, vagy egyik sem az. 1980.5.
5. Legyen $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, ahol $n>1$ egész. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ nem írható fel két legalább elsőfokú polinom szorzataként, ahol mindkét polinom együtthatói egész számok. IMO 1993.1.
6. Határozzuk meg az összes olyan (m,n) párt, ahol m, n egészek, amikre $m, n\geq 3$, amelyekhez létezik végtelen sok olyan a pozitív egész, amire $(a^m+a-1)/(a^n+a^2-1)$ egész szám. IMO 2002.3.