Olimpiai szakkör 2021 november 5.

0. Legyen *Γ* egy *I* középpontú kör, és legyen *ABCD* olyan konvex négyszög, hogy az *AB*, *BC*, *CD* és *DA* szakaszok mindegyike érinti *Γ*-t. Legyen Ω az *AIC* háromszög körülírt köre. A *BA* szakasz *A*-n túli meghosszabbítása Ω-t *X*-ben metszi, és a *BC* szakasz *C*-n túli meghosszabbítása Ω-t *Z*-ben metszi. Az *AD*, illetve a *CD* szakasz *D*-n túli meghosszabbítása Ω-t *Y* -ban, illetve *T*-ben metszi. Bizonyítandó, hogy $AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$. (IMO 2021.4.)

1. $9b + 2a = 32 - 6ab \qquad a, b \in Z$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n$ egyenletnek hány megoldása van a pozitív egészek körében, ha (a) n=2004; (b) ha n tetszőleges pozitív egész?

3. Legyen p 3-nál nagyobb prím, keressük a pozitív egész megoldásait a következő egyenletnek: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$.

4. $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy) \qquad x, y \in Z$

5. $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2 \qquad x, y \in Z$

6. $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2 \qquad x, y \in Z$

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5} \qquad x, y, z \in Z^+$

8. Lehet-e nyolc szomszédos köbszám összege is köbszám?

9. Lehet-e (a) 2001, (b) 2005 szomszédos négyzetszám összege négyzetszám?

10. Mely p, q prímekre teljesül, hogy $p^3 - q^5 = (p + q)^2$?

11. $x^5 - y^2 = 4 \qquad x, y \in Z$

12. $x^3 - y^3 = xy + 61 \qquad x, y \in Z^+$

13. $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y \qquad x, y \in Z^+$