Olimpiai szakkör 2021. szeptember 24.

1. Bebizonyítandó, hogy egész szám akkor és csakis akkor összege két négyzetszámnak, ha kétszerese ilyen tulajdonságú. (Kürschák 1938.1.)

2. Van-e 21 szomszédos pozitív egész úgy, hogy az első 11 és a további 10 négyzetösszege megegyezik?

3. Legyenek a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, és b olyan egész számok, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2.$$

Bebizonyítandó, hogy ezek a számok nem lehetnek mindannyian páratlanok. (Kürschák 1931.2.)

4. Lehet-e, hogy $a^2+u^2=b^2+(u+1)^2=c^2+(u+2)^2=d^2+(u+3)^2$. ($a, b, c, d, u$ egészek)

5. Legyen $n\geq100$ egész. Iván felírja az n, $n+1$, …, $2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám. (IMO 2021.1.)

6. Legyen d olyan pozitív egész, amely nem egyenlő sem 2-vel, sem 5-tel, sem 13-mal. Mutassuk meg, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmazban van két olyan különböző elem: a és b, amelyekre $ab-1$ nem négyzetszám. (IMO 1986.1.)

7. Minden $a_0>1$ egész számra definiáljuk az a_0, a_1, a_2, … sorozatot a következőképpen. Minden $n\geq0$-ra legyen $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, ha $\sqrt{a_n}$ egész, különben $a_{n+1}=a_n+3$. Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n=A$ teljesül végtelen sok n-re. (IMO 2017.1.)

8. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $ab+1$ osztója a^2+b^2-nek. Bizonyítsuk be hogy $(a^2+b^2)/(ab+1)$ négyzetszám. (IMO 1988.6.)

9. $a+b+c+d=u\sqrt{abcd}$. (a, b, c, d, u pozitív egészek) (VMO 2002.5.)