Olimpiai szakkör 2021. május 14.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt.
Remélem az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket,
Dobos Sándor

1. A legutóbbi szakkörön a 2021-es EGMO feladatai közül a 2. 3. és 5-et nem beszéltük meg. Ezek mellé küldök további három feladatot egy korábbi válogatóról.

2. Keressük meg mindazon véges $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sorozatokat, melyekben minden i-re (i=0, 1, 2, …, n) az x_i értéke éppen a sorozatban szereplő i számok számával egyenlő.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós $x_1, x_2, \dots, x_n$ számokra teljesül, hogy

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\dots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}<\sqrt{n}\,.$$

4. Adott a síkon n olyan pont, hogy bármely kettejük távolsága egész szám ($n \geq 4$).

(a) Bizonyítsuk be, hogy $n=4$ esetén van két pont, amelyeknek távolsága 3-mal osztható.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $n>4$ esetén a pontok között fellépő távolságoknak legalább az egyhatoda osztható 3-mal.