Olimpiai szakkör 2021. április 16.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt.
Remélem az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket,
Dobos Sándor

1. Az $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{2003}$ nemnegatív valós számok összege 2, továbbá tudjuk, hogy $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_4 + \ldots + s_{2002}s_{2003} + s_{2003}s_1 = 1$. Legyen $S = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{2003}^2$. Határozzuk meg az adott feltételek mellett S lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.
2. A hegyesszögű ABC háromszög belsejében levő P pontra igaz, hogy $APB\angle = BPC\angle = CPA\angle$. A BP és CP egyenesek az AC és AB oldalakat rendre D-ben és E-ben metszik.
Mutassuk meg, hogy $AB + AC \geq 4DE$.
3. Egy sakk körmérkőzésen k ember vett részt és mindenki mindenkivel egyszer játszott. Miután az összes mérkőzés lezajlott kiderült, hogy bármely 4 versenyző között van olyan, aki a többi három versenyző közül egyet megvert, egytől kikapott, a harmadikkal döntetlenben egyezett meg. Legyen ilyen feltételek mellett k a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy $6 \leq k \leq 9$.
4. Határozzuk meg mindazon $n>1$ egészeket, amelyekre egyértelműen létezik olyan a egész, amelyre $0 < a \leq n!$ és $n!$ osztója $(a^n + 1)$-nek.