Olimpiai szakkör, 2021. március 19.

A szakkör kb. két órás lesz, délután 15–17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt.

1. feladat: A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq AC$. A BC átmérőjű kör az AB és AC oldalakat az M és N pontokban metszi. A BC oldal felezőpontja O, A BAC és MON szögek szögfelezői az R pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a BMR és CNR köröknek van egy közös pontja a BC oldal belsejében.

2. feladat: Adjuk meg azokat a pozitív egész (m, n) párokat, amelyekre $m+n$ és $mn+1$ is 2-hatvány.

3. feladat: Az a, b, c, d pozitív számokra $abcd = 1$ és $a+b+c+d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a+b+c+d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

4. feladat: Adott n darab, nem feltétlenül különböző egész szám, továbbá két pozitív egész szám, p és q. Válasszunk ki az n egész szám közül két egyenlőt, és az egyiket növeljük meg p-vel, a másikból vonjunk le q-t. Ha továbbra is vannak egyenlők az n szám között, akkor ismételjük meg az eljárást. Bizonyítsuk be, hogy véges sok lépés után n különböző számot kapunk.

5. feladat: Van-e. olyan rácstéglalap, amely felbontható az ábrán látható ötszöggel egybevágó csempékre?