Olimpiai szakkör 2021. március 05.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt.
Remélem az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket,
Dobos Sándor

1. Adott hat pont az ABC egyenlőoldalú háromszög oldalain: A_1 és A_2 a BC oldalon, B_1 és B_2 a CA oldalon, C_1 és C_2 az AB oldalon, úgy, hogy ezek a pontok egy $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ konvex hatszög csúcsai, amelynek az oldalai egyenlő hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_2, B_1C_2 és C_1A_2 egyenesek egy ponton mennek át.

2. Legyen a_1, a_2, ... egész számoknak egy olyan sorozata, aminek van végtelen sok pozitív tagja és végtelen sok negatív tagja is. Tudjuk, hogy minden pozitív egész n-re az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok n-nel osztva n különböző maradékot adnak. Bizonyítsuk be, hogy minden egész szám pontosan egyszer fordul elő a sorozatban.

3. Legyenek x, y, z pozitív valós számok, amelyekre teljesül $xyz \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(x^5-x^2)/(x^5+y^2+z^2)+(y^5-y^2)/(y^5+z^2+x^2)+(z^5-z^2)/(z^5+x^2+y^2)\geq 0$$

4. Határozzuk meg mindazon $n>1$ egészeket, amelyekre egyértelműen létezik olyan a egész, amelyre $0 < a \leq n!$ és $n!$ osztója (a^n+1)-nek.