Olimpiai szakkör 2021. február 19.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Aki készít megoldást, a szakkörön bemutathatja. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt.
Remélem az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket,
Dobos Sándor

1. Határozzuk meg az x és y valós számokat, ha $x \geq 1$, $y \geq 1$, továbbá A és B nem szomszédos egész számok, ahol $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ és $B = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$.
2. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsából induló f félegyenes a B-ből induló BC és a D-ből induló DC félegyeneseket rendre az X és Y pontokban metszi. Az ABX és ADY háromszögek BX és DY oldalaihoz hozzáírt körök középpontjai rendre K és L. Igazoljuk, hogy a $KCL\angle$ nem függ f választásától.
3. Határozzuk meg mindazon $n>1$ egészeket, amelyekre egyértelműen létezik olyan a egész, amelyre $0 < a \leq n!$ és $n!$ osztója $(a^n + 1)$-nek.
4. Legyen $H=\{1,2,3,\ldots,100\}$. A H halmaz egy részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha csak egyetlen számot, vagy néhány szomszédos számot tartalmaz. Határozzuk meg a legnagyobb k egészt, amelyre megadható H-nak k részhalmaza úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete összefüggő.