Olimpiai szakkör 2021. február 5.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Remélem a feladatok pár nappal előbb megérkeznek a regisztrált szakkörösökhöz, így lesz rá idejük, hogy megismerkedjenek a példákkal. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg.

Erre a szakkörre négy feladatot küldök, az első kapcsolódik a korábban elindított témához, a további három korábbi válogatóversenyről való. Dobos Sándor

1. Egy konvex hétszög oldalai páronként különböző hosszúak. Egymást nem metsző átlókkal hányféleképpen vágható fel a hétszög háromszögekre?
2. Legyen $H=\{1,2,3,\dots,100\}$. A H halmaz egy részhalmazát összefüggőnek nevezzük, ha csak egyetlen számot, vagy néhány szomszédos számot tartalmaz. Határozzuk meg a legnagyobb k egészt, amelyre megadható H-nak k részhalmaza úgy, hogy közülük bármely két különbözőnek a metszete összefüggő.
3. Az ABC háromszögben $AB+BC=3AC$. A beírt kör az AB és BC oldalakat rendre D és E pontokban érinti, a beírt kör középpontja I. D-t és E-t az I pontra tükrözve a G és H pontokat kapjuk. Igazoljuk, hogy $ACGH$ húrnégyszög.
4. Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvényt, amelyre
   $$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1$$
   teljesül $\mathbf{R}$ minden x, y elemére.