Olimpiai szakkör 2020. december 4.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg. Az alábbi négy feladat közül az elsőt a legutóbbi szakkörön elkezdtük, a másik három korábbi válogatóversenyen szerepelt.

Dobos Sándor

1. Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt körének rövidebb BC ívét felezi az A' pont. Az A' középpontú BC-t érintő kör legyen $k(a)$. Hasonlóan definiáljuk a $k(b)$, $k(c)$ köröket. A $k(a)$ és $k(b)$ körök háromszöget átszelő közös érintője legyen $t(ab)$. Hasonlóan kapjuk a $t(bc)$ és $t(ca)$ érintőket. Igazoljuk, hogy ez a három érintő egy ponton megy át.
2. Hány olyan $p(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható x^2+x+1-gyel?
3. Legyenek a, b olyan pozitív egészek, hogy p $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p?
4. Egy számtani sorozat tagjai és differenciája is pozitív egészek. A sorozat első n tagjának a tízes számrendszerbeli alakjában sehol sem szerepel a 9-es számjegy. Legfeljebb mekkora lehet n?