Olimpiai szakkör 2020. október 16.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Remélem a feladatok pár nappal előbb megérkeznek a regisztrált szakkörösökhöz, így lesz rá idejük, hogy megismerkedjenek a példákkal. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg.

Ezen a szakkörön a szeptemberben lezajlott IMO 1. és 2. továbbá a friss Kürschák példák közül az 1. és 3. megoldásait vesszük majd át. Ha marad még időnk, akkor következik még két példa: a legutóbbi szakkörről megmaradt és egy egyenlőtlenség korábbi válogatóversenyről. Bízom benne, hogy az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket, Dobos Sándor

1. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek: $\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$. Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $\angle ADP$ és a $\angle PCB$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.
2. Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geq b \geq c \geq d > 0$ és $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy
$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a b^b c^c d^d < 1.$$
3. Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k + 1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.
4. Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.
5. Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat, semelyik két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az A és B város között, ha létezik még két további város C és D úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem A és C, sem C és D, sem D és B között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?
6. Legyenek a,b,c,d olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. Igazoljuk, hogy
$$(a+b)(c+d)\geq 2(ab+cd).$$