3. Válogatóverseny

2021. május 25.

1. Feladat

Az $ABCD$ konvex négyszögben $ABC\angle > 90°$, $CDA\angle > 90°$, és $DAB\angle = BCD\angle$. Jelölje A tükörképét a BC és CD egyenesekre rendre E és F. Tegyük fel, hogy az AE és AF szakaszok a BD egyenest rendre a K és L pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a BEK és DFL háromszögek köré írt körök érintik egymást.

2. Feladat

Tekintsük az F_0, F_1, ... Fibonacci számokat, melyekre $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha $n \geq 1$. Adott egész $n \geq 2$ esetén határozzuk meg a pozitív egészekből álló S halmaz elemszámának a legkisebb lehetséges értékét, ha minden $k = 2, 3, ..., n$ esetén valamely $x, y \in S$-re $x - y = F_k$.

3. Feladat

Keressük meg mindazon f függvényeket, amelyek értelmezési tartománya a pozitív egészek halmaza, értékei pedig nemnegatív egészek lehetnek, továbbá teljesül az alábbi három tulajdonság mindegyike:

(i) $f(n) \neq 0$ legalább egy n-re;

(ii)$f(xy) = f(x) + f(y)$ minden pozitív egész x, y-ra;

(iii) végtelen sok olyan pozitív egész n van, hogy minden $k < n$ esetén $f(k) = f(n-k)$.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.

Az IMO sazabályai szerint ezt a feladatsort a 2021-es IMO utolsó napjáig, 2021. július 24-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.