

1. Legyen n pozitív egész. Az $1, 2, \dots, n$ számok hány $a_1, a_2, \dots, a_n$ permutációjára teljesül, hogy

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n?$$

2. Az a, b, c, d pozitív valós számokra igaz, hogy $(a+c)(b+d)=ac+bd$. Határozzuk meg az alábbi kifejezés legkisebb lehetséges értékét:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

3. A síkon van $n \geq 6$ páronként diszjunkt körlap: $D_1, D_2, \dots, D_n$, sugaraik rendre $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n$. Minden $i=1, 2, \dots, n$ esetén kiválasztottuk a D_i körlap egyik P_i pontját. A körlapok zártak, azaz a határvonaluk is hozzájuk tartozik. Legyen a sík egy tetszőleges pontja O . Bizonyítsuk be, hogy

$$OP_1 + OP_2 + \dots + OP_n \geq R_6 + R_7 + \dots + R_n.$$