Language: **Hungarian**

Day: **1**

2020. november 27., péntek

1. Legyenek a, b, c pozitív egész számok, melyekre
$$\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$$
négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy $a=b=c$.

2. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. A kör a BC és AC oldalakat a D és E pontokban érinti. Legyen a BI és DE egyenesek metszéspontja G. Bizonyítsd be, hogy AG merőleges BG-re!

3. Egy szabályos 100-szög 41 csúcsát kékre, a maradék 59 csúcsát pedig pirosra színezzük. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik 24 konvex négyszög $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{24}$, amiknek a csúcsai a 100-szög csúcsai közül kerülnek ki, továbbá
   - a $Q_1, \ldots Q_{24}$ négyszögek páronként diszjunktak, és
   - minden Q_i négyszögnek pontosan 3 csúcsa egyszínű, a negyedik csúcsa pedig ellenkező színű.

4. Keresd meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
$$f(x-f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) - 1.$$

Language: Hungarian

Rendelkezésre álló idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.

Ahhoz, hogy az olimpiai válogatás minden országban igazságos és mindenki számára élvezhető legyen, kérjük, hogy az IMO verseny utolsó napjáig (2021. július 24.) ne hozd nyilvánosságra, illetve ne utalj a feladatokra az interneten, szociális hálókon!