Olimpiai szakkör 2026. április 17.

A legutóbbi szakkörről maradt három feladat:

1. Az ABC háromszög A-ból induló szögfelezője a BC oldalt D-ben metszi. Az ABD háromszög beírt köre az AB oldalt E-ben, az ADC háromszög beírt köre az AC oldalt H-ban érinti. Igazoljuk, hogy az EH egyenes az említett két körből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki.
2. Hány S részhalmaza van a $H=\{1,2,3,...,10\}$ halmaznak, amelyre S minden elemének valamely szomszédja is S-beli? (Meg kell számolnunk az üres halmazt és magát a H halmazt is.)
3. Az f függvény értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok , a függvény minden értéke valós szám. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy $f(1)=1$ és bármely $m \geq n$ nemnegatív egész számok esetén $f(m+n)+f(m-n)=1/2 \cdot (f(2m)+f(2n))$.

4. Van öt páronként különböző színű és tömegű golyó, melyeket egy kétkarú mérleggel szeretnénk súlyuk szerint nagyság szerint rendezni. Minimum hány mérésre van szükség, ha minden mérésben egy-egy golyót tehetünk fel?

5. Van 32 páronként különböző színű és tömegű golyó, és egy kétkarú mérleg, amelyre minden mérésben egy-egy golyót tehetünk fel. Mutassuk meg, hogy 39 méréssel kiválasztható a nehézségi sorrend első három helyezettje.