

Olimpiai felkészítő feladatok 2026. február 13-ra

1. Tegyük fel, hogy a G irányított gráfban P_1, P_2, \dots, P_k olyan irányított utak, amelyeknek nincs közös csúcsa. Tegyük fel továbbá, hogy Q_1, Q_2, \dots, Q_ℓ is olyan irányított utak G -ben, amelyeknek nincs közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy léteznek G -ben olyan R_1, R_2, \dots, R_m irányított utak, amelyeknek nincs közös csúcsa, és ezen utak \mathcal{R} halmazára az alábbi feltételek teljesülnek.
 - (a) Minden P_i út kezdőpontjából indul \mathcal{R} -beli út.
 - (b) Minden \mathcal{R} -beli út valamely P_i vagy Q_j út kezdőpontjából indul.
 - (c) Minden Q_j út utolsó csúcsában végződik \mathcal{R} -beli út.
 - (d) Minden \mathcal{R} -beli út valamely P_i vagy Q_j út utolsó csúcsában végződik.
 - (e) Minden \mathcal{R} -beli út valamely egy P_i út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy Q_j út (esetleg üres) végszeletének összefűzésével keletkezik.
2. Tegyük fel, hogy egy síkbeli P alakzat kiparkettázható az alábbi ábra bal oldalán látható kétféle S csempe eltoltjaival. Bizonyítsuk be, hogy ha P kiparkettázásához az iménti S csempék mellett az ábra jobb oldalán látható kétféle Z csempe eltoltjait is felhasználtuk, akkor ez a parkettázás páros sok Z csempét tartalmaz.



3. Piréziát a téli olimpián 10 fiú és 10 lány képviseli. Az esemény megnyitóján mindegyiküknek egy-egy színes sapkát kell viselnie, amit az általa kapott három különböző színű sapkából választhat ki. (Az egyes versenyzők nem feltétlenül kaptak ugyanolyan színű sapkákat.) Kiöltözhet-e a piréz csapat a megnyitóra úgy, hogy ne legyen olyan piréz fiú és lány, akik egyforma színű sapkát viselnek?
4. Miután Piréziában enyhítették a kijárási korlátozást, kötelezővé tették a maszkviselést. Mivel ebben sem szeretnék az egyébként rendkívül fegyelmezett polgárokat feleslegesen korlátozni, mindenki szabadon eldöntheti, hogy narancssárga vagy nemzetiszínű maszkot kíván-e viselni. A piréz amellett, hogy rendszerető, szorgos és alkalmazkodó nép, néhány további sajátos vonással rendelkezik. Például aktív a facebookon: minden piréz minden reggel feltölt magáról egy szelfit és délután megnézi az összes ismerősének az aznap feltöltött képét. Természetesen minden piréz minden nap olyan színű maszkot hord, mint amelyet a facebook-ismerősei többsége az előző napon viselt. (Különös módon minden piréznek páratlan számú piréz facebook-ismerőse van.)
Bizonyítsuk be, hogy előbb-utóbb lesz olyan nap, amikor minden piréz a két nappal azelőtti maszkjával azonos színű maszkban lesz.

(Közismert, hogy Piréziában facebook-ismeretséget nem lehet megszüntetni.)