Első adag (2025. dec. 5. péntek délután és este)

1.1. Vármegyés feladat (ld. a lap túloldalán).

1.2. **a)** Bizonyítsd be, hogy ha egy gráfban minden fokszám legfeljebb 7, akkor ki lehet színezni a csúcsait 8 színnel (úgy, hogy a szomszédos csúcsok mindig különböző színűek legyenek).
b) ★ Milyen plusz feltétellel tudnád belátni, hogy elég 7 szín?

1.3. **a)** Egy sakktáblára úgy tettem le bábukat, hogy minden sorban és oszlopban pontosan két bábu álljon. Bizonyítsd be, hogy levehetek néhány bábut úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy bábu maradjon.
b) Igaz marad-e az állítás, ha csak azt teszem fel, hogy minden sorban és oszlopban *legalább* két bábu áll?

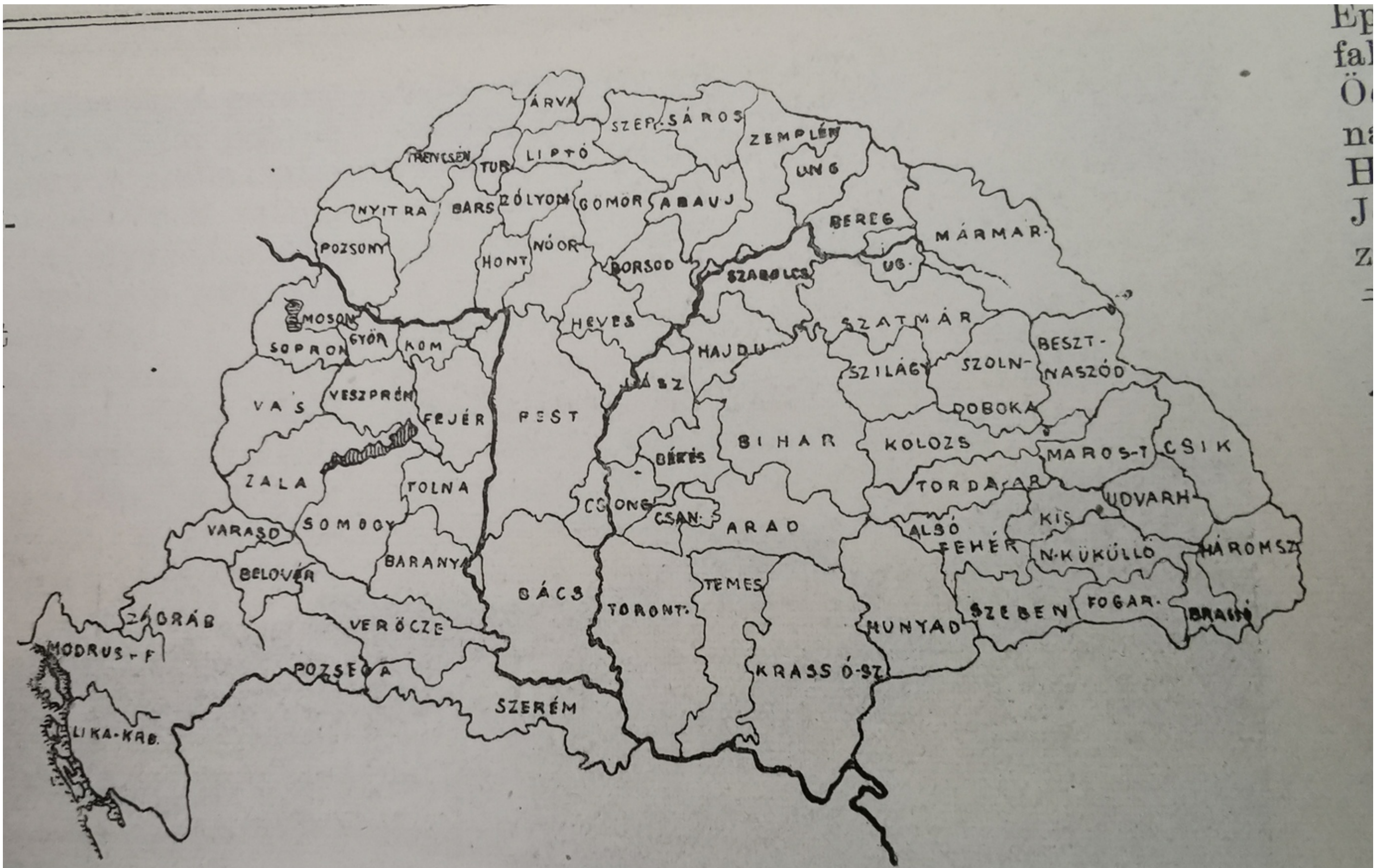
1.4. Egy 8 csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az $1, 2, \ldots, 28$ természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)
a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?
b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?
c) ★ Mit tudsz mondani általánosan, 8 helyett n csúcsú teljes gráf esetén?

1.5. Mennyi egy egyszerű síkbarajzolt gráf legkisebb fokszámának lehetséges legnagyobb értéke?

1.6. ★ Egy teremben 4 asztal és 8 ember van. Egy 32 lapos magyarkártya-paklit véletlenszerűen szétosztottuk a 8 ember között úgy, hogy mindegyik ember kezében 4 lap legyen.
Bizonyítsuk be, hogy mindegyik ember letehet 1-1 lapot a kezéből a 4 asztalra úgy, hogy végül mind a 4 asztalon 8 különböző értékű kártya (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) legyen.

1.7. **a)** 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról a témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármelyik kettő azonos témáról levelez egymással. *(IMO 1964/4)*
b) Mi a helyzet 16 tudós esetén?

1.8. ★ Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja. *(Kürschák 2020/1.)*



Melyik az a négy magyarországi megye, melyek *bármelyikéből* a többi három megye bármelyikébe közvetetlenül el lehet jutni, azaz a nélkül, hogy egy *harmadik* megyén kelljen áthaladni? Található-e Magyarországon *öt* megye ugyanezzel a tulajdonsággal?

forrás: Vasárnapi Újság rejtvényrovata – 1912

Második adag (2025. dec. 6. szombat délelőtt)

2.1. Egy dobozban zoknik vannak, legalább kétféle színben és legalább kétféle hosszúságban. Bizonyítsd be, hogy ki lehet választani egy *antipárt*, azaz két olyan zoknit, amelyek színe és hossza is eltér.

2.2. **a)** Igaz-e, hogy minden 4-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros és 2 kék él találkozzon?
b) Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 3 piros és 3 kék él találkozzon?
c) ★ Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra, kékre és zöldre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros, 2 kék és 2 zöld él találkozzon?

2.3. Egy sakktáblán 33 bástya áll. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 5 bástya, melyek közül semelyik kettő nincs azonos sorban vagy oszlopban.

2.4. Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör. *(KöMaL B.5105.)*

2.5. A Gallai–Roy-tétel azt mondja ki, hogy ha a G irányított gráfban nincsen m élű egyirányú út, akkor $\chi(G) \leq m$.
a) Bizonyítsuk be a tételt aciklikusan irányított gráfokra.
b) ★ A teljes tétel bizonyítása is szép és rövid, de trükkös. (Szabad rajta gondolkodni.)
c) Bizonyítsd be, hogy minden turnamentben van Hamilton-út.
A turnament egy olyan gráf, ahol bármely két csúcsot él köt össze az egyik irányban. *(LKPF[1] 9.9.)*

2.6. ★ Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

(IMO 2020/3., javasolta Haiman Milán és Carl Schildkraut)

[1] Lovász László: Kombinatorikai Problémák és Feladatok (Typotex 2008 verzió számozásaival

Harmadik adag (2025. dec. 6. szombat – házi feladatok)

$\boxed{\textbf{3.1.}}$ Ha egy térképen minden ország szomszédos a tengerrel, akkor színezhető 3 színnel.
. *(Kőnig Dénes feladata)*

$\boxed{\textbf{3.2.}}$ Bizonyítsd be, hogy ha egy síkbarajzolt gráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai színezhetők 4 színnel. *(LKPF 9.53)*

$\boxed{\textbf{3.3.}}$ Adott egy gráf. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a kezdő játékos kijelöl egy csúcsot, ezután a soron következő játékos mindig egy szomszédos csúcsra lép. Az veszít, aki olyan csúcsra lép, ahol már jártak korábban. A gráf milyen tulajdonságától függ, hogy kinek van nyerő stratégiája?

$\boxed{\textbf{3.4.}}$ ★ Rajzoljunk a síkba egyeneseket úgy, hogy nincsen köztük 3, melyek egy pontban metszik egymást. Tekintsük a metszéspontokat egy gráf pontjainak, és a szomszédos metszéspontok közötti szakaszokat a gráf éleinek. Bizonyítsuk be, hogy a kapott síkbarajzolt gráf 3-színezhető. *(LKPF 9.57., Sachs tétele)*

$\boxed{\textbf{3.5.}}$ ★ Egy $n \times n$-es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T-ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.
. *(Kürschák 2017/3.)*

$\boxed{\textbf{3.6.}}$ ★ Egy G gráf k-színezése a G csúcsainak megszínezése k lehetséges szín felhasználásával úgy, hogy G bármely élének végpontjai különböző színűek legyenek. Azt mondjuk, hogy G *egyértelműen k-színezhető*, ha egyrészt G-nek létezik k-színezése, másrészt nem léteznek G-nek olyan u és v csúcsai, melyek G valamely k-színezésében azonos színűek, míg G egy másik k-színezésében egymástól különböző színt kapnak. Bizonyítsuk be, hogy ha az n pontú G gráf egyértelműen 3-színezhető és $n \geq 3$, akkor G-nek legalább $2n-3$ éle van. *(Kürschák 2003/2.)*