Polinomok

Bán-Szabó Áron szakköre

Feladatok I.

I/1. Az $f(x), g(x)$ másodfokú polinomok olyanok, hogy $f(n)g(n)$ egész szám minden egész n-re. Biztosak lehetünk-e abban, hogy ekkor az $f(n), g(n)$ értékek is egészek minden n egész esetén?

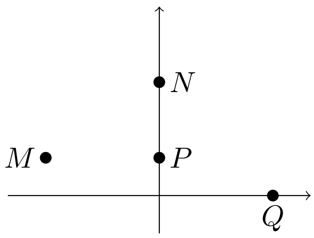
I/2. Legyen P olyan polinom, amire $P(8) + P(11) < 19 < P(7) + P(12)$. Bizonyítsd be, hogy vannak olyan x, y számok, amikre $x + y = P(x) + P(y) = 19$.

I/3. Az A, B valós számok olyanok, hogy a

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - Ax + B$$

polinomnak négy valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy $1 \leq A \leq \frac{5}{4}$ és $0 \leq B \leq \frac{81}{16}$.

I/4. Léteznek-e olyan a, b, c valós számok, melyekre az M, P, Q pontok rajta vannak az x^3+bx^2+cx+a polinom grafikonján, míg az M, N pontok rajta vannak az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom grafikonján?



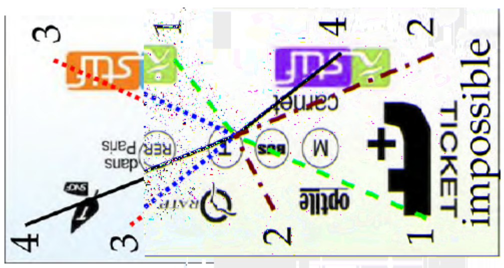
I/5. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c, d, e valós számokra $2a^2 < 5b$, akkor az

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

polinomnak van nem valós gyöke!

I/6. Legyen n egy pozitív egész szám. Jelölje $\mathbb{F}_n$ a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ számok halmazát, ahol az összeadás és a szorzás is $\pmod n$ értendő. Milyen n-ekre igaz, hogy minden $\mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_n$ függvény egy polinom?

I/7. Miért nincsenek ilyen polinomok? (Amik a 0 közelében így viselkednek.)



I/8. (Erdős) Egy n-ed fokú 1 főegyütthatós polinomnak mind az $n \geq 2$ gyöke a $[-1, 1]$ intervallumban van. Igazoljuk, hogy nincsenek olyan $a \in (-1, 0)$, $b \in (0, 1)$ számok, amikre $\min(|f(a)|, |f(b)|) \geq 1$ teljesülne.

2025. március 29.
Szakkörvezető: Bán-Szabó Áron(banszaboaron@yahoo.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Feladatok II.

II/1. Egy táblára fel vannak írva az $x^3 - 3x^2 + 5$, $x^2 - 4x$ polinomok. Ha a táblán szerepelnek az $f(x), g(x)$ polinomok, akkor felírhatjuk még az $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), f(g(x)), cf(x)$ polinomokat is, ahol c egy tetszőleges valós szám. Lehetséges-e, hogy véges sok lépés után szerepel egy $x^n - 1$ alakú polinom a táblán, ahol n egy pozitív egész szám?

II/2. Melyik az az ötödfokú P polinom, amely $(x-1)^3$-al osztva -1, míg $(x+1)^3$-al osztva 1 maradékot ad?

II/3. Milyen $P(x), Q(x)$ polinomokra teljesül, hogy

$$Q^2(x) - (x^2 + 1)P^2(x) = 1?$$

II/4. Határozzuk meg azokat a $P(x)$ valós együtthatós polinomokat, melyekre

$$P(\sqrt{2} \cdot x) = P(x + \sqrt{1 - x^2})$$

teljesül tetszőleges $|x| \leq 1$ valós szám esetén!

II/5. **a)** Legyen az $n \geq 1$-ed fokú f polinom gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (komplex számok). Mutassuk meg, hogy

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_i}.$$

b) Igazoljuk, hogy minden nem konstans f polinom esetén f' gyökei benne vannak f gyökeinek konvex burkában.

II/6. **a)** (Mason-Stothers-tétel) Legyenek az A, B, C relatív polinomok olyanok, hogy $A + B = C$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 + \max(\deg A, \deg B, \deg C) \leq \deg(r(ABC)),$$

ahol $r(ABC)$ az ABC polinom legnagyobb négyzetmentes osztóját jelöli. (azaz $\deg(r(ABC))$ az ABC polinom különböző komplex gyökeinek számát jelöli).

b) Bizonyítsuk be, hogy az $f^n + g^n = h^n$ egyenletnek nincs nem triviális megoldása a polinomok gyűrűjében ha $n \geq 2$. (Mit jelent itt a triviális megoldás?)

II/7. (USA TST) Adottak az f, g nem konstans valós együtthatós relatív prím polinomok. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb három olyan λ szám létezhet, amire $f + \lambda g$ egy polinom négyzete.

II/8. **a)** Legyen f egy n-ed fokú racionális együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy bármely h racionális szám esetén

$$f(x+h) = f + hf' + h^2\frac{f''}{2} + \ldots + h^n \cdot \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

b) Legyen p egy prímszám, k egy pozitív egész szám, f egy egész együtthatós polinom, h pedig egy p^k-al osztható egész. Igazoljuk, hogy

$$f(x+h) \equiv f + hf' \pmod{p^{k+1}}.$$

c) (Hensel lemma) Legyen f egy egész együtthatós polinom, p pedig egy prímszám. Ha $p \mid f(a)$ valamilyen a egészre és $p \nmid f'(a)$, akkor igazoljuk, hogy ($\pmod{p^k}$-egyértelműen) létezik olyan b egész szám, amire $p^k \mid f(b)$ és $b \equiv a \pmod{p}$.

d) Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik olyan m egész szám, amire $m2^n - 7$ négyzetszám.

2025. március 29.

Szakkörvezető: Bán-Szabó Áron(banszaboaron@yahoo.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Olimpiai Iskola
vol2

SZAKKÖR

Algebra tábor

Bán-Szabó Áron - polinomok, olimpiai iskola tábor

Házi feladatok

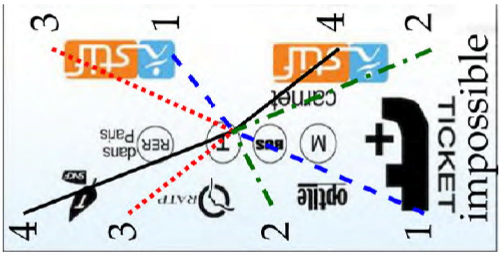
HF/1. Az A, B valós számok olyanok, hogy a

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - Ax + B$$

polinomnak négy valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy $1 \le A \le \frac{5}{4}$.

HF/2. Bizonyítsd be, hogy nem léteznek olyan P_1, P_2, P_3, P_4 polinomok, amelyek átmennek az origón, és

- ha $x < 0$ elég kicsi, akkor $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$;
- ha $x > 0$ elég kicsi, akkor $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.



HF/3. **a)** Legyen f egy n-ed fokú racionális együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy bármely h racionális szám esetén

$$f(x+h) = f + hf' + h^2\frac{f''}{2} + \ldots + h^n \cdot \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

b) Legyen p egy prímszám, k egy pozitív egész szám, f egy egész együtthatós polinom, h pedig egy p^k-al osztható egész. Igazoljuk, hogy

$$f(x+h) \equiv f + hf' \pmod{p^{k+1}}.$$

c) (Hensel lemma) Legyen f egy egész együtthatós polinom, p pedig egy prímszám. Ha $p \mid f(a)$ valamilyen a egészre és $p \nmid f'(a)$, akkor igazoljuk, hogy ($\pmod{p^k}$)-egyértelműen) létezik olyan b egész szám, amire $p^k \mid f(b)$ és $b \equiv a \pmod{p}$. (Használj indukciót!)

d) Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik olyan m egész szám, amire $m2^n - 7$ négyzetszám.

Szakkörvezető: Bán-Szabó Áron (banszaboaron@yahoo.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu