Olimpiai szakkör 2024. november 29.

1. (A legutóbbi szakkörről megmaradt): Egy matematikaversenyen 21 lány és 21 fiú vett részt. Mindegyik versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg. Mindegyik fiúhoz és mindegyik lányhoz van legalább egy olyan feladat, amit mindketten megoldottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan feladat, amit legalább három lány és három fiú megoldott.
2. Megadható-e 2024 különböző pozitív egész úgy, hogy bármelyik szám osztja a többi összegét.
3. Egy síkbeli konvex sokszög területe 32 cm^2 , egyik átlójának és két egymással szemközti oldalának összege 16 cm. Állapítsuk meg e négyszög másik átlójának minden lehetséges értékét.
4. Legyen $P_1(x)= x^2–2$; $P_j(x)= P_1(P_{j–1}(x))$; $j=2,3,\ldots$ Bizonyítsuk be, hogy n tetszés szerinti pozitív egész értéke esetén a $P_n(x)=x$ egyenletnek minden gyöke valós és páronként különböző.
5. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P az A-ból induló magasság talppontja a BC oldalon. Tegyük fel, hogy $BCA\angle\geq ABC\angle+30°$. Bizonyítsuk be, hogy $CAB\angle+COP\angle<90°$.
6. Számítsuk ki olyan pozitív egész számok szorzatának a maximumát, amelyek összege 1976.
7. Legyen BC az O középpontú Γ kör átmérője. Legyen A a Γ kör egy olyan pontja, amire $0°<AOB\angle<120°$. Legyen D a C-t nem tartalmazó AB ív középpontja. Az O-n keresztül DA-val párhuzamosan húzott egyenes messe az AC egyenest a J pontban. OA felező merőlegesének és Γ-nak a metszéspontjai legyenek E és F. Bizonyítsuk be, hogy J a CEF háromszög beírt körének a középpontja.
8. Legyen n egy 1-nél nagyobb páratlan egész, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pedig adott egészek. Az $1,2,\ldots,n$ számok mind az $n!$ darab $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ permutációjára legyen
$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$
Bizonyítsuk be, hogy van két olyan b és c permutáció, amelyekre $b\neq c$, és $n!$ osztója $(S(b)–S(c))$-nek.