Olimpiai szakkör 2024. október 11.

0. A legutóbbi szakkörről: Határozzuk meg azokat a pozitív p prímszámokat, amikre a $(2^{p-1}-1):p$ tört értéke négyzetszám.

1. Legyenek $P_{1, \ldots,} P_{2n+1}$ az origó középpontú egységkörön úgy, hogy egyik pont y koordinátája sem lehet negatív. Igazoljuk, hogy a pontok helyvektorainak összege nem lehet 1-nél rövidebb.

2. Legyen m pozitív egész, p pedig pozitív prímszám. Milyen m és p értékre teljesül: $p^m=(p-1)!+1$?

3. Állapítsuk meg $a^2 + b^2$ lehető legkisebb értékét, ha a és b olyan valós számokat jelentenek, amelyekre az $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ egyenletnek van (legalább egy) valós gyöke.

4. Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L. Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b-nek és b osztója L-nek. Igazoljuk, hogy ezen $(a;b)$ párok száma 5-tel osztható.

5. Egy katonának meg kell győződnie arról, hogy valamely egyenlő oldalú háromszög alakú terep - határvonalát is beleértve - aknamentes-e. Észlelő berendezésének hatósugara egyenlő a háromszög magasságának felével. A katona a háromszög egyik súlypontjából indul el. Milyen utat kell választania, ha a terepet a legrövidebb úton haladva akarja átvizsgálni?

6. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészekből álló $(a;b)$ számpárt, amire $a^2:(2ab^2-b^3+1)$ pozitív egész.