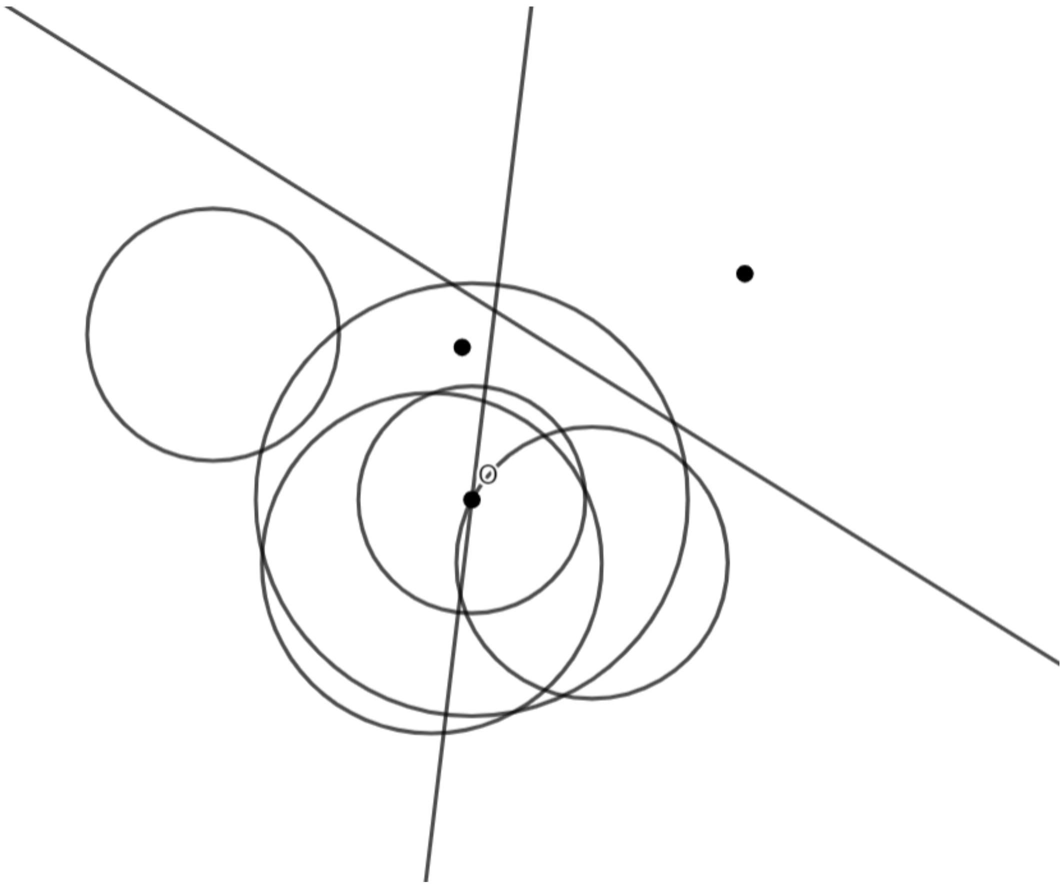
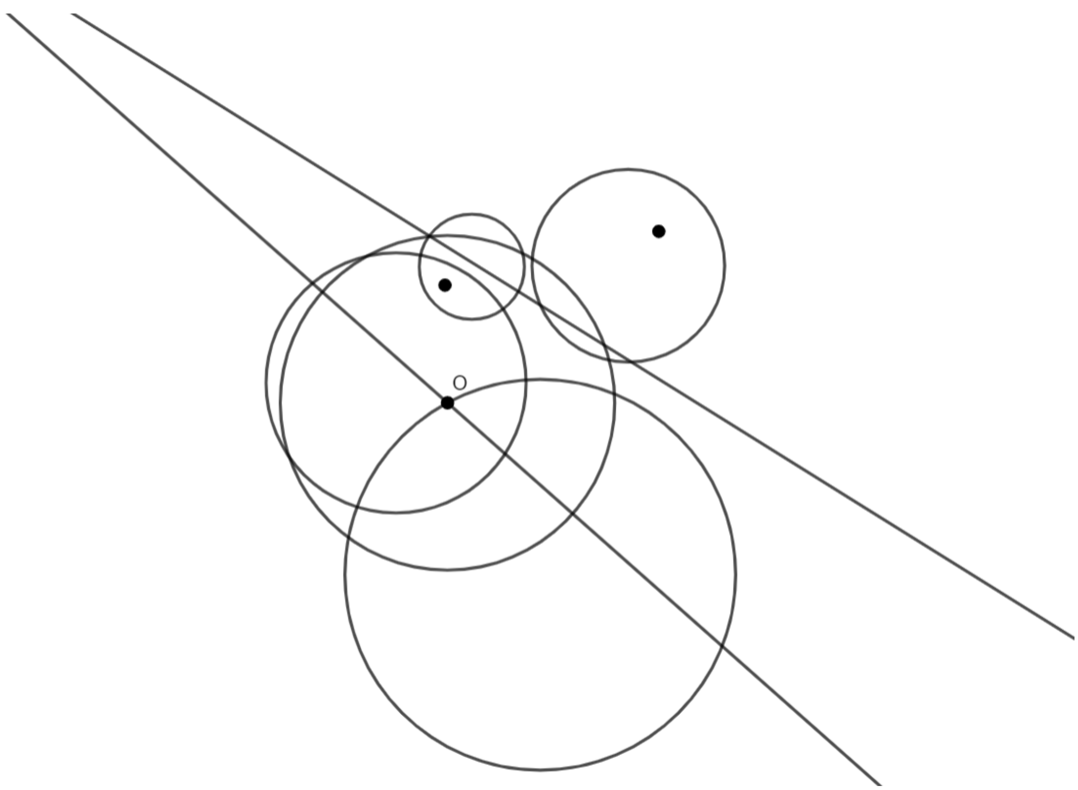
Invertáljunk mindent az O középpontú nagyobbik körre.

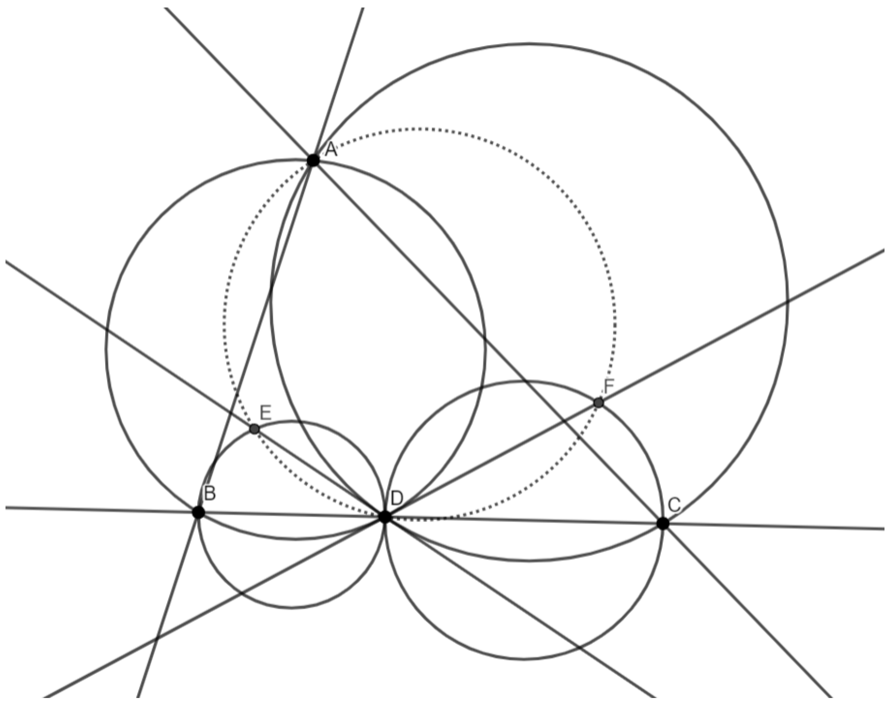


Negatív invertáljunk mindent az O középpontú körre.

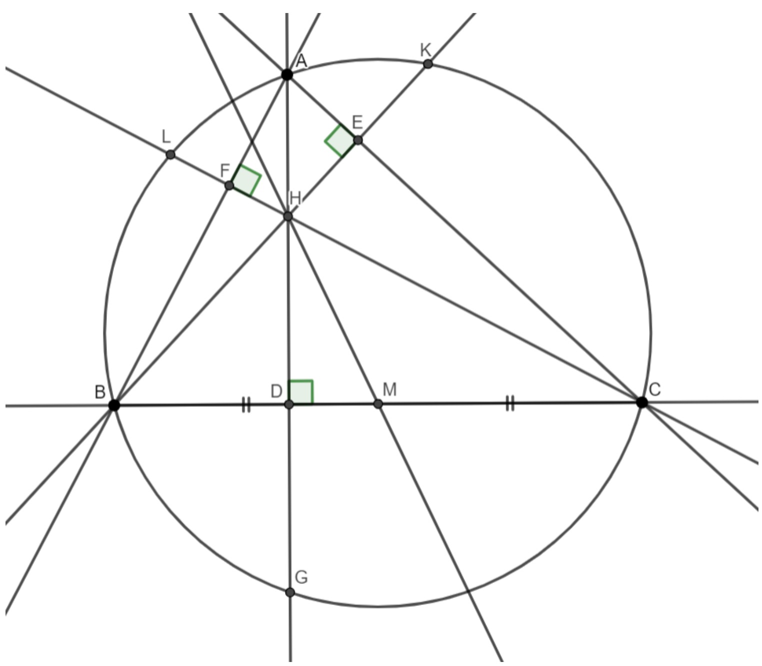


Memo 2021: Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, és D a BC szakasz egy belső pontja. Legyenek az E és F pontok az A-t tartalmazó, BC egyenes által határolt félsíkban úgy, hogy DE és BE merőleges, továbbá DE érinti az ACD háromszög köréírt körét, illetve DF és CF merőleges, továbbá DF érinti az ABD háromszög köréírt körét. Bizonyítsd be, hogy az A, D, E és F pontok egy körre illeszkednek.

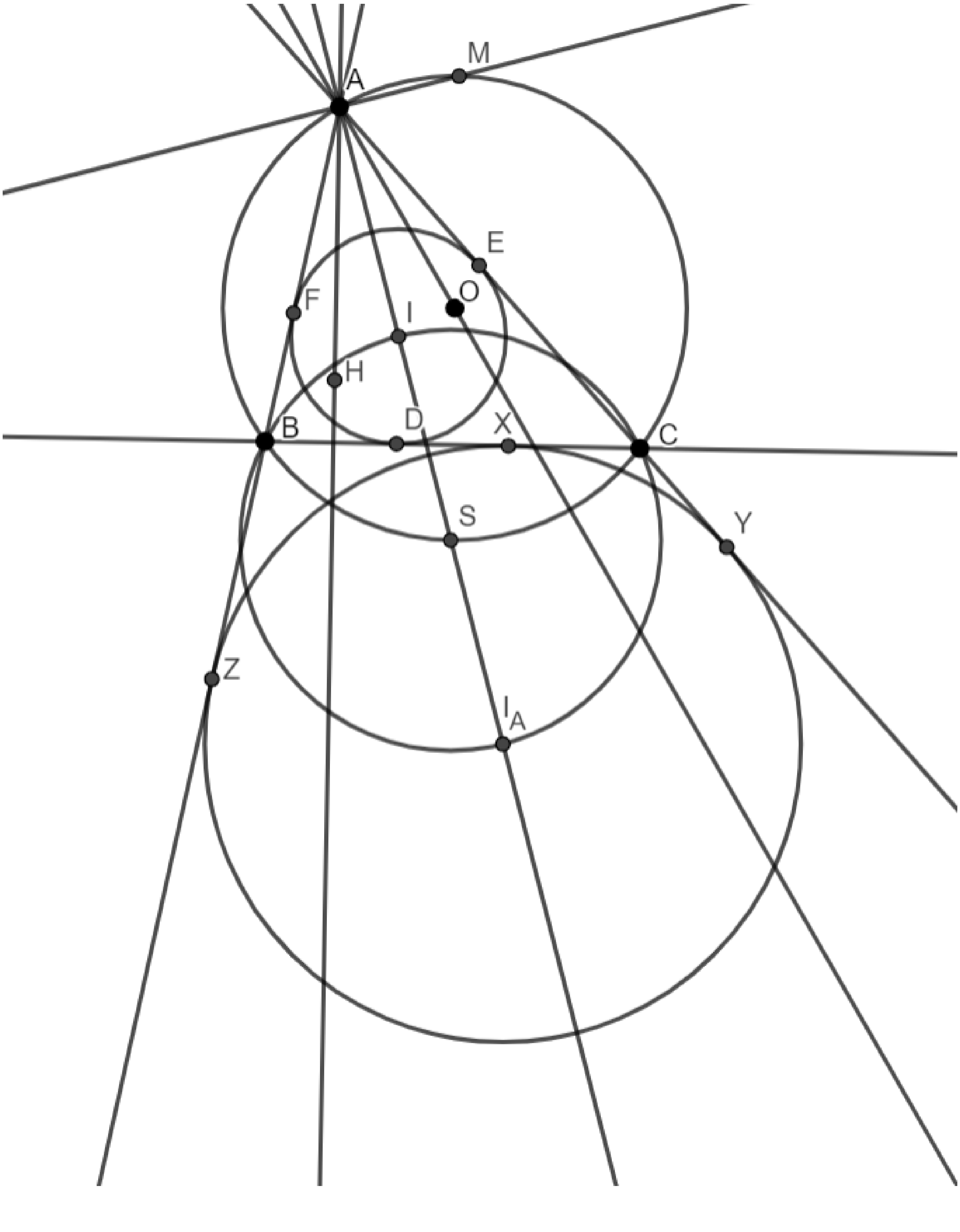
A füzetedbe rajzold le D-re való inverzió során kapott ábrát!



Alkalmazzunk azt a H középpontú inverziót, ami megcseréli A-t és D-t az ábra minden körére/egyenesére/pontjára, és rajzoljuk be az ábrába a képeiket névvel együtt!



Alkalmazzunk $\sqrt{bc}$ inverziót az ábra minden körére/egyenesére/pontjára, és rajzoljuk be az ábrába a képeiket névvel együtt!



1. P pontból k körhöz húzott érintő két érintési pontja A és B, felezőpontjuk M. Bizonyítsd, hogy M és P inverz képek k-ra nézve.

2. A és B pontok inverz képek egy k körre, és ω egy kör A-n és B-n keresztül. Bizonyítsd, hogy ω önmaga marad a k-ra való incerzió során.

3. k_1 és k_2 körök metszéspontjai A és B. Bizonyítsd be, hogy AB egyenesen egy P pontból k_1-hez és k_2-hez húzott 2-2 érintő 4 érintési pontja egy körön van.

4. Az ω_1, ω_2 körök kívülről érintik egymást a T pontban, míg az Ω kör mindkét kört érinti, rendre az A_1, A_2 pontokban úgy, hogy Ω tartalmazza a másik két kört. A $P \in \Omega$ pontra teljesül, hogy PT érinti az ω_1, ω_2 köröket. Igazoljuk, hogy ha $PA_1 \cap \omega_1 = B_1 \neq A_1$ és $PA_2 \cap \omega_2 = B_2 \neq A_2$, akkor a B_1B_2 egyenes érinti az ω_1, ω_2 köröket.

5. Legyen ω az ABC háromszög köréírt köre, és legyen l az az egyenes, ami A-ban érinti ω-t. Az ω_1, ω_2 körök érintik az l, BC egyeneseket és ω-t kívülről. Jelölje D és E rendre az ω_1, ω_2 körök és BC érintési pontjait. Bizonyítsd be, hogy az ADE háromszög körülírt köre érinti ω-t.

6. k_1, k_2, k_3 és k_4 négy kör a síkon úgy, hogy k_i érinti k_{i+1} minden $i = 1, 2, 3, 4$-re ($k_5 = k_1$). Igazoljuk, hogy a négy érintési pont vagy egy körön vagy egy egyenesen van!

7. ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = AC$. O belső pontja a BC szakasznak. Egy O középpontú körre invertálva A, B és C képei rendre A', B' és C'. Bizonyítsd be, hogy az $A'O$ egyenes felezi a $B'A'C'$ szöget.

8. ABC háromszögben az I középpontú beírt kör rendre D, E, F pontokban érinti az BC, CA és AB oldalakat. Bizonyítsd be, hogy AID, BIE és CIF körök átmennek egy I-től különböző közös ponton.

9. k_1 és k_2 körök metszéspontjai A és B. k_1-et és k_2-t P-ben és Q-ban érinti az ω kör. A inverz képe ω-ra A'. Bizonyítsd be, hogy $A'PQB$ húrnégyszög.

10. k_1 kör teljesen k_2 kör belsejében van. $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ körök mind érintik k_1-et, illetve k_2-t, ezenfelül k_i érinti k_{i+1}-t minden $i = 1, \ldots, n-1$-re. $\omega_1', \omega_2', ..., \omega_n'$ köröknek ugyanez a tulajdonságuk. Bizonyítsd be, hogy ha ω_n érinti ω_1-et, akkor ω_n' is érinti ω_1'-et.

11. k_1, k_2, k_3 körök hatványpontja X. Egy O középpontú inverzió a 3 kört k_1', k_2', k_3' körökbe viszi, amiknek X^* a hatványpontja. Bizonyítsd be, hogy X, I és X^* egy egyenesen vannak.

12. ABC háromszögben az I középpontú beírt kör rendre D, E, F pontokban érinti az BC, CA és AB oldalakat. D merőleges vetülete EF-re R. Az ABC kör és az AEF kör A-n kívül másodjára S-ben metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy I, R és S egy egyenesre esnek.

13. k_1 kör teljesen k_2 kör belsejében van. Bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan P pont, hogy bármely $B, C \in k_1$, $A, D \in k_2$, A, B, C, D ilyen sorrendben egy egyenesen levő pontokra $APB\angle = CPD\angle$.

14. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB > AC$. Legyen Γ a körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-hoz tartozó magasságvonal talppontja. M a BC oldal felezőpontja. A Q pont úgy helyezkedik el Γ-n, hogy $HQA\angle = 90$, illetve K úgy helyezkedik el Γ-n, hogy $HKQ\angle = 90$ teljesül. Tegyük fel, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek és ebben a sorrendben helyezkednek el Γ-n. Igazoljuk, hogy a KQH, FKM háromszögek körülírt köreik érintik egymást.

15. ABC háromszög köréírt körének középpontja O. ω a mixtilineáris beírt kör. ω rendre D-ben, E-ben és F-ben érinti (ABC)-t, AC-t és AB-t. EF (ABC)-t X-ben és Y-ban metszi. A tükörképe D-re Z. Bizonyítsd, hogy (XYZ) kör érinti ω-t, és az érintési pont AD-n van.

Házik:

A következő feladatokhoz felhasználható, hogy egy inverzió során bármely kör vagy egyenes képe kör vagy egyenes lesz.

Bizonyítsd be, hogy egy O középpontú inverzió során

1. Két kör/egyenes metszéspontja a képeik metszéspontjába megy.
2. egy O-n átmenő kör egy O-n nem átmenő egyenesbe megy, és egy O-n nem átmenő egyenes pedig O-n átmenő körbe.
3. egy O-n átmenő egyenes képe önmaga.
4. egy nem O-n átmenő kör képe egy nem O-n átmenő kör.
5. két, egymást O-ban érintő kör képe két párhuzamos egyenes lesz.
6. két egymást érintő kör/egyenes képe két egymást érintő kör/egyenes lesz.
7. ha $OABC$ húrnégyszög, akkor A', B', C' pontok egy egyenesen vannak, és fordítva, azaz ha A, B, C pontok egy egyenesen vannak, akkor $OA'B'C'$ húrnégyszög.
8. ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $A'B'C'D'$ vagy húrnégyszög, vagy a 4 pont egy egyenesen van.
9. tetszőleges X, Y pontokra $OXY\angle = -OY'X'\angle$ irányított szögekkel. (Ha nem tudod, mi az az irányított szög, akkor a mínuszjel nélkül lásd be sima szögekre)
10. k_1, k_2, k_3 és k_4 négy kör a síkon úgy, hogy k_i érinti k_{i+1} minden $i = 1, 2, 3, 4$-re ($k_5 = k_1$). Igazoljuk, hogy a négy érintési pont vagy egy körön vagy egy egyenesen van! Invertáljuk az egész ábrát az egyik érintési pontra, és egy külön ábrában kezdjük el lerajzolni az eredményt, majd az eredeti állításnak megfelelő invertált állítást lássuk be az új ábrán.

Nehéz házik: Az órai feladatsor 7-es, 8-as, 9-es feladata
Szorgalmi: Minden más feladat az órai feladatsorról.