OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Gráf színezések

Nagy Kartal, olimpiai iskola tábor

Feladatok

F/1. Legyen $\chi(G)$ a gráf kromatikus száma, azaz legkevesebb hány színre van szükség, hogy a csúcsokat ki tudjuk színezni úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Mennyi a Petersen-gráf kromatikus száma?

F/2. Mutassuk meg, hogy **a)** $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$, **b)** $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

F/3. Igaz-e, hogy tetszőleges G gráf csúcsainak van olyan sorrendje, hogy a sorrend szerint mohón színezve (mindig a legkisebb sorszámú szabad színt használva) éppen $\chi(G)$ színt használunk?

F/4. Egy gráf k-listaszínezése: minden csúcsnál van egy k hosszú színlista, amik közül választhatunk egy színt. Cél úgy kiszínezni, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. **a)** Igaz-e, hogy $k = \chi(G)$ esetén tudunk k-listaszínezni? **b)** Mutassuk meg, hogy van olyan páros gráf, ami nem k-listaszínezhető.

F/5. *Cseresznyének* nevezzünk egy élpárt, ha van közös végpontja a két élnek. Hány cseresznye van egy olyan egyszerű gráfban, aminek fokszámai $d_1, d_2, \ldots d_n$?

F/6. Egy egyszerű gráfnak n csúcsa és e éle van. Bizonyítsd be, hogy a cseresznyék száma legalább $\frac{e(2e-n)}{n}$.

F/7. Egy háromszögmentes egyszerű gráfban a cseresznyék száma legfeljebb $e(n-2)/2$.

F/8. Egy társaságban mindenkinek 8 ismerőse van jelen. Ha ketten ismerik egymást, akkor pontosan 3 közös ismerősük, ha nem ismerik egymást, akkor pontosan 2 közös ismerősük van.
a) Hány tagú a társaság?
b) Adj példát ilyen társaságra.

F/9. Van egy 1000 csúcsú páros gráfunk. Legalább hány színre van szükségünk ahhoz, hogy a csúcsait biztosan ki tudjuk színezni mohón, ha a csúcsok sorrendjét nem mi határozzuk meg?

F/10. Mi következik a 6. és 7. feladat állításaiból?

F/11. Mutasd meg, hogy ha egy gráfban nincsen 4 csúcsú kör, akkor $e \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$.

2024. március 15.

Szakkörvezető: Nagy Kartal nagykartal97@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Kettős leszámlálás, valószínűség

Nádor Benedek, olimpiai iskola tábor

Feladatok

F/1. Bizonyítsuk be, hogy
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

F/2. Egy négyzet négy csúcsát és a belsejében 20 pontot kékre színezünk. Ezután néhány kék pontot összekötünk úgy szakaszokkal, hogy semelyik két szakasz se metsze egymást és a négyzetet háromszögekre bontják a szakaszok (úgy, hogy a kék pontok háromszögek csúcsai). Hány háromszöget kapunk?

F/3. 10 ember bement a Libribe könyvet vásárolni. Tudjuk, hogy

(i) mindenki pontosan 3 könyvet vásárolt;

(ii) bármely két emberhez van olyan könyv, amit mindketten megvettek.

Tudjuk, hogy azt a könyvet, amit a legtöbben vettek meg, összesen k ember vásárolta meg. Mi k minimális értéke?

F/4. Legyen $n \geq 2$ egész szám. Mutasd meg, hogy
$$\lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor + \lfloor \log_3(n) \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n(n) \rfloor.$$

Megjegyzés: $\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egészrészét jelöli, vagyis azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél.

F/5. Jelöljük $p_n(k)$-val az $1, 2, \ldots, n$ halmaz olyan permutációnak számát, amiknek pontosan k fixpontjuk van. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!.$$

F/6. Egy $n \times m$-es táblázat minden mezőjébe nemnegatív valós számokat írunk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban van legalább egy pozitív szám. Ezen kívül, ha egy sor és egy oszlop közös elemében pozitív szám van, akkor a sor elemeinek összege megegyezik az oszlop elemeinek összegével. Bizonyítsuk be, hogy $m = n$.

2024. március 15.

Szakkörvezető: Nádor Benedek nador.benedek@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/7. Egy iskolában n diák tanul. Év elején minden diák eldönti, hogy milyen órákra fog járni. Minden órán legalább két diák vesz részt, és ha két különböző órára igaz, hogy legalább két gyerek jár mindkettőre, akkor erre a két órára különböző számú diák jár. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $(n-1)^2$ órára járnak diákok.

F/8. A matek érettségin m diák és n vizsgáztató vesz részt, ahol $n \geq 3$ páratlan egész. Minden vizsgáztató minden érettségizőt értékel. Kétféle értékelés van: 'ügyes' és 'megbukott'. Legyen k egy olyan szám, amire bármely 2 vizsgáztatóra igaz, hogy legfeljebb k érettségizőről szavaztak ugyanúgy. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$. (Nem lett megbeszélve)

F/9. Adott egy sorban $n!$ üres kosár, megjelölve az 1, 2 $\ldots n!$ sorszámokkal. Cézár először beletesz minden kosárba egy követ. Ezután beletesz minden második kosárba két követ. Hasonlóan folytatja, míg végül beletesz minden n. kosárba n követ. Másként megfogalmazva, $i = 1, 2, \ldots n$ mindegyikére Cézár beletesz i követ az i, $2i$, $3i$,$\ldots$, $n!$ sorszámú kosarakba.

Jelölje x_i, hogy mindezen lépések után hány kő lesz az i. kosárban. Igazold hogy

$$n! \cdot n^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n!} x_i^2 \;\leq\; n! \cdot n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

F/10. 799 csapat játszik körmérkőzéses bajnokságot (mindenki mindenki ellen egyszer játszik). Bizonyítsuk be, hogy van két diszjunkt A, B halmaza a játékosoknak, amire $|A|, |B| \geq 7$ és A minden játékosa megverte B minden játékosát. (Nem lett megbeszélve)

F/11. Egy 100×100-as táblázatban az $1, 2, \ldots, 100$ számok mindegyike pontosan százszor szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van olyan sor vagy oszlop, amiben legalább 10 különböző szám van.

F/12. Egy osztályban minden fiú ismer legalább egy lányt. Bizonyítsuk be, hogy ki tudjuk választani az osztálynak legalább a felét úgy, hogy minden kiválasztott fiú páratlan sok kiválasztott lányt ismer. (Nem lett megbeszélve)

F/13. Legyen n egy páros pozitív egész szám és legyen G egy n-csúcsú, egyszerű gráf, aminek $\frac{n^2}{4}$ éle van. Az x, y halmazt *elégedett*nek nevezzük, ha x, y G különböző csúcsai és van közös szomszédjuk (azaz van olyan z csúcsa G-nek, hogy xz és yz élek. Bizonyítsuk be, hogy G-hez legalább $2\binom{n/2}{2}$ *elégedett* halmaz van.

F/14. Egy matekversenyen 21 fiú és 21 lány vesz részt. Tudjuk, hogy

(i) minden versenyző legfeljebb hat feladatot oldott meg;

(ii) minden L lányhoz és F fiúhoz van olyan feladat, amit L és F is megoldott.

Bizonyítsuk be, hogy volt olyan feladat, amit legalább három lány és három fiú is megoldott.

F/15. Egy matekversenyen 6 feladatot adtak fel, amikből bármely kettőre igaz, hogy azt a kettőt legalább a versenyzők $\frac{2}{5}$ része oldotta meg. Nem volt olyan versenyző, aki mind a 6 feladatot megoldotta. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan versenyző, aki pontosan 5 feladatot oldott meg.

2024. március 15.

Szakkörvezető: Nádor Benedek nador.benedek@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Kombinatorikus geometria

Imolay András, olimpiai iskola tábor

Feladatok

F/1. Adott $2n$ pont a síkon, mutassuk meg, hogy van olyan egyenes, aminek mindkét oldalán pontosan n pont van.

F/2. Adott n pont a síkon, igazoljuk, hogy ki tudunk közülük választani hármat, hogy egyik pont se essen ezen három pont köréírt körén kívül.

F/3. Adott a síkon n pont. Bizonyítsuk be, hogy a pontokat sorba lehet rendezni, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, hogy $P_1P_2 \ldots P_n$ egy (nem önátmetsző) sokszög legyen.

F/4. Adott n egyenes a síkon. Számozzuk be a metszéspontjaikat különböző számokkal úgy, hogy minden egyenesen valamilyen irányban monoton nőjön a számozás.

F/5. (Sylvester–Gallai-tétel) Adott n pont a síkon, melyek nincsenek mind egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, ami pontosan két ponton megy át.

F/6. Adott a síkon véges sok pont úgy, hogy bármelyik három által meghatározott háromszög területe legfeljebb 1. Bizonyítsuk be, hogy van olyan háromszög, ami az összes pontot a belsejében tartalmazza, és a területe legfeljebb 4.

F/7. Igazoljuk, hogy a sík tetszőleges 5 pontjából ki lehet választani 4-et, amik konvex pozícióban vannak.

F/8. Adott n egyenes a síkon, ezek meghatároznak tartományokat. Bizonyítsuk be, hogy a tartományok két színnel színezhetőek úgy, hogy a szomszédosak különböző színt kapjanak.

F/9. Adott 8 pont a síkon, nincs 3 egy egyenesen, és nincs 5 egy körön. Legfeljebb hány olyan kör lehet, ami áthalad 4 ponton.

F/10. Adott n egyenes a síkon, nem megy át három egy ponton. Színezzük meg a metszéspontjaikat három színnel úgy, hogy minden egyenesen a szomszédos metszélpontok színei különbözőek.

F/11. Adott n egyenes a síkon, melyek nem mennek át egy ponton, és nincs köztük két párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amin pontosan két egyenes megy át.

2024. március 16.

Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/12. Adott n pont a síkon, melyek közül bármelyik három pont lefedhető egy egység sugarú körrel. Igazoljuk, hogy van olyan egység sugarú kör, ami az összes pontot fedi.

F/13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges sokszöget fel lehet háromszögelni egymást nem metsző átlók segítségével. (Nem beszéltük meg)

F/14. Adottak piros, sárga és kék pontok, melyek közül nincs 3 egy egyenesen. Minden kék háromszögben van piros, minden piros háromszögben sárga, és minden sárga háromszögben kék pont. Legfeljebb hány pont lehet összesen? (Nem beszéltük meg)

2024. március 16.
Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

1. olimpiai iskola tábor házi feladatok

Nagy Kartal, Nádor Benedek, Imolay András

F/1. Mutassuk meg, hogy ha K_n éleit tetszőlegesen színezzük két színnel, akkor az egyszínű háromszögek száma legalább $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$.

F/2. A Telefüle telefontársaság egyik kapcsolótábláján 400 kimenet van. Bármely kettőt összeköt egy vezeték, amely piros vagy kék. A piros és kék vezetékek száma megegyezik. A rendszer megbénul, ha kiveszünk két azonos színű vezetéket, amik 4 különböző kimenet közt futnak. Bizonyítsd be, hogy a konkurens cég technikai banditái ugyanannyi módon béníthatják meg a rendszert két kék vezeték eltávolításával, mint két piroséval.

F/3. Legyen $c \geq 4$ egy páros egész szám. Egy focibajnokságban minden csapatnak van egy hazai meze és egy idegenbeli meze. Minden hazai meznek két különböző színe van, és minden idegenbeli meznek egy színe van. Minden csapat idegenbeli mezének a színe különbözik a hazai mez mindkét színétől. Összesen a mezek között legfeljebb c különböző szín szerepel. Ha két csapatnak ugyanaz a két szín van a hazai mezén, akkor az idegenbeli mezük eltérő színű.

Azt mondjuk, hogy két mez *üti egymást*, ha van olyan szín, ami mindkettőn megjelenik. Tegyük fel, hogy a bajnokság bármely X csapatához nincs olyan Y csapat a bajnokságban, hogy X hazai meze üti Y mindkét mezét. Legfeljebb hány csapat lehet a bajnokságban?

F/4. A matek érettségin m diák és n vizsgáztató vesz részt, ahol $n \geq 3$ páratlan egész. Minden vizsgáztató minden érettségizőt értékel. Kétféle értékelés van: 'ügyes' és 'megbukott'. Legyen k egy olyan szám, amire bármely 2 vizsgáztatóra igaz, hogy legfeljebb k érettségizőről szavaztak ugyanúgy. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.

F/5. 799 csapat játszik körmérkőzéses bajnokságot (mindenki mindenki ellen egyszer játszik). Bizonyítsuk be, hogy van két diszjunkt A, B halmaza a játékosoknak, amire $|A|, |B| \geq 7$ és A minden játékosa megverte B minden játékosát.

F/6. Egy osztályban minden fiú ismer legalább egy lányt. Bizonyítsuk be, hogy ki tudjuk választani az osztálynak legalább a felét úgy, hogy minden kiválasztott fiú páratlan sok kiválasztott lányt ismer.

F/7. Adott n piros és n kék pont a síkon. Igazoljuk, hogy párba tudjuk állítani a piros és kék pontokat úgy, hogy a párokat összekötő szakaszok közül semelyik kettő ne metsze egymást.

F/8. Adott 2024 pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy tudunk találni 400 konvex sokszöget (legalább négyszögek), melyek páronként nem metszik egymást (közös csúcsuk sincs), és minden csúcsuk az adott 2024 pont közül való.

F/9. Adott n pont a síkon. Igazoljuk, hogy ki lehet választani közülük legalább $\lceil\sqrt{n}\rceil$ pontot úgy, hogy semelyik három kiválasztott pont ne alkosson szabályos háromszöget.

F/10. Adott egy $P_1P_2,\ldots,P_{2n}$ konvex sokszög, és egy Q pont a sokszög belsejében. Bizonyítsuk be, hogy van olyan oldala a sokszögnek, melyhez nem létezik olyan P_i csúcsa, hogy a P_iQ egyenes áthalad az oldal egy belső pontján (azaz metszi az oldalt, és nem a csúcsokon megy keresztül).