OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Projektív geometria

Imolay András szakköre

Definíció (Vetítés egyenesről egyenesre) — Adott az e és f egyenes a síkon, és egy P pont, ami egyik egyenesre sem esik rá. Ekkor az e egyenes f egyenesre vetítése a P ponton keresztül az a transzformáció, aminek az értelmezési tartománya e pontjai, az értékkészlete f pontjai, és minden $A \in e$ ponthoz hozzárendeli azt az $A' \in f$ pontot, melyre P, A, A' egy egyenesen vannak.

F/1. Mi a baj ezzel a definícióval?

Definíció (Projektív sík) — Az euklideszi sík minden "irányához" vegyünk fel egy új pontot. Azaz minden e egyenest kibővítünk még egy I_e ponttal úgy, hogy két egyenesen pontosan akkor van rajta ugyanaz az extra pont, ha párhozamosak. Nevezzük ezeket a plusz pontokat *ideális pontoknak*. Ezen felül mondjuk azt, hogy az ideális pontok egy egyenesre esnek, az *ideális egyenesre*.

F/2. Gondoljuk meg, hogy a projektív síkon továbbra is igaz az, hogy bármely két ponton pontosan egy egyenes megy át, de most már az is igaz, hogy bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

F/3. Gondoljuk meg, hogy most már értelmes a vetítés definíciója.

F/4. Lehet egy ideális pontból vetíteni?

Definíció (Előjeles szakaszok) — Minden egyenesnek válasszuk ki az egyik irányát, és AB jelölje az A és B pontok távolságát, ha $\overrightarrow{AB}$ párhuzamos az AB egyenesen választott iránnyal, különben pedig legyen AB az A és B pontok távolságának ellentettje.

Definíció (Kettősviszony) — Ha A, B, C, D különböző pontok egy egyenesen, akkor legyen

$$(A, B, C, D) = \frac{AC/CB}{AD/DB}.$$

2024. február 3.
Szakkörvezető: Imolay András (imolay.andras@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

Tétel. Legyen e és f két egyenes, P egy pont, ami egyik egyenesre sem esik, és vetítsük e-t f-re. Ekkor ha A, B, C, D képe rendre A', B', C', D' akkor

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

F/5. Mutassuk meg, hogy az (A, B, C, D) kettősviszony nem függ attól, hogy az egyenesen milyen irányt választottunk (lásd előjeles szakaszok definíciója).

F/6. Bizonyítsuk be a tételt abban az esetben, ha P egy idális pont.

F/7. Lehet-e $(A, B, C, D) = 1$?

F/8. Mutassuk meg, hogy ha az A, B, C, D pontok közül csak három adott, továbbá ismerjük az (A, B, C, D) kettősviszonyt, akkor a negyedik pontot is egyértelműen meg tudjuk határozni.

F/9. Mikor lesz az (A, B, C, D) kettősviszony pozitív?

F/10. Hogyan definiálnátok az (A, B, C, I) kettősviszonyt, ahol A, B, C, I egy egyenesen vannak, és I az egyenes ideális pontja?

F/11. És hogyan definiálnátok négy pont kettősviszonyát, akik mind az ideális egyenesen vannak?

Lemma. Ha A, B, C, D egy egyenesen vagy körön van, akkor

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A) = X$$
$$(A, B, D, C) = (B, A, C, D) = (D, C, A, B) = (C, D, B, A) = \frac{1}{X}$$
$$(A, C, B, D) = (C, A, D, B) = (B, D, A, C) = (A, C, B, D) = 1 - X$$
$$(A, C, D, B) = (C, A, B, D) = (D, B, A, C) = (B, D, C, A) = \frac{1}{1 - X}$$
$$(A, D, B, C) = (D, A, C, B) = (B, C, A, D) = (C, B, D, A) = 1 - \frac{1}{X}$$
$$(A, D, C, B) = (D, A, B, C) = (C, B, A, D) = (B, C, D, A) = \frac{1}{1 - \frac{1}{X}}$$

Definíció (Sugársor) — Egy ponton áthaladó egyenesek halmazát sugársornak nevezzük.

F/12. Hogyan definiálnád az (a, b, c, d) egy sugársorhoz tartozó egyenesek kettősviszonyát?

Tétel. Ha a, b, c, d egy sugársorhoz tartozó egyenesek, akkor

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin(ac)/\sin(cb)}{\sin(ad)/\sin(db)},$$

Szakkörvezető: Imolay András (imolay.andras@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

ahol irányított szögekről beszélünk, azaz kiválasztunk egy körüljárási irányt, és aszerint pozitív vagy negatív előjellel tekintjük a szögeket.

F/13. Adott egy e és f egyenes, és egy P pont, ami egyik egyenesen sincs rajta. Legyenek A, B, C, D az e egyenesen és A', B', C', D' az f egyenesen úgy, hogy $APA'\sphericalangle = BPB'\sphericalangle = CPC'\sphericalangle = DPD'\sphericalangle = 90°$. Mutassuk meg, hogy $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

F/14. Hogyan definiálnád négy pont kettősviszonyát, amik egy körre esnek?

Tétel. Ha A, B, C, D különböző pontok egy körön, akkor

$$|(A, B, C, D)| = \left|\frac{AC/CB}{AD/DB}\right|.$$

F/15. Lehet-e **a)** körről egyenesre **b)** körről körre vetíteni?

F/16. Ha adott egy k kör és egy P pont a körön, és k-t vetítjük P-ből egy e egyenesre, akkor mi legyen a P pont képe?

Definíció (projektív transzformáció) — Egy transzformáció, mely egyenesről vagy körről képez egyenesre vagy körre projektív, ha megtartja a kettősviszonyt, azaz tetszőleges A, B, C, D pontok esetén, melyek képei rendre A', B', C', D' teljesül, hogy

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

F/17. Tekintsünk egy e és f egyenesek között menő h projektív transzformációt. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor egy vetítés (azaz akkor létezik P pont, hogy a P pontból e-ről f-re vetítés éppen h), ha $h(M) = M$, ahol M az e és f egyenesek metszéspontja.

Tétel. Az alábbi transzformációk projektívek:

- Egyensről egyenesre vetítés.
- Egyenesről körre vetítés, ha a vetítőpont a körön van.
- Körről másik körre vetítés, ha a vetítőpont mindkét körön rajta van.
- Körről önmagára vetítés, ha a vetítőpont nincs a körön.
- (extra) Inverzió.

Definíció (Harmonikus pontnégyes) — Az A, B, C, D egy egyenes vagy körön lévő pontokat *harmonikusnak* nevezzük, ha $(A, B, C, D) = -1$. Hasonlóan, ha a, b, c, d egy sugársorhoz tartozik, akkor harmonikusnak nevezzük, ha $(a, b, c, d) = -1$.

F/18. Adott az A és B pont. Az AB egyenes melyik C pontjára lesz (A, B, C, I) haromnikus, ahol I az ideális pont?

2024. február 3.
Szakkörvezető: Imolay András (imolay.andras@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/19. Legyen ABC egy háromszög, és D, E, F pontok a BC, AC, AB oldalakon. Legyen a BC és EF egyenesek metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy (B, C, D, M) pontosan akkor harmonikus, ha az AD, BE és CF egyenesek egy ponton mennek át.

F/20. Bizonyítsuk be projektív geometria segítségével, hogy egy háromszög középvonalai párhuzamosak az oldalakkal.

F/21. Érintse az ABC háromszög beírt köre az AB, AC, BC oldalakat rendre az E, F, G pontokban. Érintse az ABD háromszög beírt köre az AB, AD, BD oldalakat rendre az E', H, J pontokban. Tegyük fel, hogy $E = E'$. Mutassuk meg, hogy az AB, FG, HJ egyenesek egy ponton mennek át.

F/22. Mutssuk meg, hogy ha $ABCD$ egy húrnégyszög, akkor (A, C, B, D) pontosan akkor harmonikus, ha a köréírt körhöz A-ban és C-ben húzott érintők metszéspontja rajta van a BD egyenesen.

F/23. Legyen A, B, C, D egy egyenesen és P egy pont nem ezen az egyenesen úgy, hogy a PB egyenes a CPD szög szögfelezője és AP merőleges BP-re. Mutassuk meg, hogy (A, B, C, D) harmonikus.

F/24. Adott egy egyenesen A, B, C. Szerkesszük meg D pontot csak vonalzóval úgy, hogy (A, B, C, D) harmonikus legyen.

F/25. (Pillangó-tétel) Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, legyen az átlói metszélpontja P, és legyen MN a kör egy olyan húrja, melynek P a felezőpontja. Tegyük fel, hogy az AB és CD oldalak metszik az MN szakaszt, és legyenek ezek a metszéspontok X és Y. Igazoljuk, hogy $XP = PY$.

F/26. Az M_1 pont az $ABCD$ négyszög AB oldalegyenesén van. Legyen M_2 az M_1 pont vetülete a BC egyenesre D-ből, M_3 az M_2 pont vetülete a CD egyenesre A-ból, M_4 az M_3 pont vetülete a DA egyenesre B-ből, M_5 pedig az M_4 pont vetülete az AB egyenesre C-ből, és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy $M_{13} = M_1$.

F/27. Adott az ABC háromszög és egy M pont. Egy M-en áthaladó egyenes az AB, BC, CA egyeneseket rendre C_1, A_1, B_1 pontokban metszi. Az AM, BM, CM egyenesek ABC köréírt körét rendre az A_2, B_2, C_2 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban metszik egymást, ami az ABC köréírt körén van.

F/28. Ha A, B, C, D egy egyenesre esnek, akkor (A, B, C, D) pontosan akkor harmonikus, ha $MA^2 = MC \cdot MD$, ahol M az AB szakasz felezőpontja.

1 Lekötő feladatok

N/1. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. Az AB és CD egyenesek az E pontban metszik egymást, az AC és BD átlók pedig az F pontban. Az AFD és BFC hármszögek köré írt körei másodszor a H pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy EH és HF merőleges.

N/2. Az $ABCD$ húrnégyszögben legyen E az AD és BC metszéspontja (C van B és E között), F pedig az AC és BD metszéspontja. Legyen M a CD oldal felezőpontja, és $N \neq M$

Szakkörvezető: Imolay András (imolay.andras@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

egy pont ABM köréírt körén úgy, hogy $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$. Mutassuk meg, hogy E, F, N egy egyenesre esnek.

N/3. ω_1 és ω_2 körök középpontjai O_1 és O_2, és kívülről érintik egymást a D pontban, valamint egy ω kört mindketten érintenek belülről az E és F pontokban. Az l egyenes az ω_1 és ω_2 közös érintője a D ponton át. Legyen AB az ω azon átmérője, amely merőleges az l egyenesre úgy, hogy A, E, O_1 ugyanazon az oldalon vannak az l egyeneshez képest. Bizonyítsuk be, hogy AO_1, BO_2, EF és l egy ponton mennek át.

N/4. A P pont az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalán helyezkedik el. Legyen ω a CPD beírt köre, és I ennek a középpontja. Tegyük fel, hogy ω érinti az APD és BPC háromszögek beírt köreit a K és L pontokban. Az AC és BD egyenesek az E pontban metszik egymást, és az AK és BL egyenesek az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az E, I és F pontok egy egyenesre esnek.

N/5. Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, ahol $BA \neq BC$. Jelölje k_1 és k_2 rendre az ABC és ADC háromszögek beírt köreit. Tegyük fel, hogy létezik egy k kör, amely érinti az AD és CD egyeneseket, a BA félegyenest A-n túl, és a BC félegyenest C-n túl. Bizonyítsuk be, hogy k_1 és k_2 közös külső érintői k-n metszik egymást.

Házi feladatok

HF/1. Legyen $PQRS$ egy konvex négyszög, a PQ és RS egyenesek metszéspontja A, a QR és SP egyenesek metszéspontja B, a PR és QS egyenesek metszéspontja C. Továbbá a BC egyenes messe az SR és PQ egyeneseket az E és F pontokban, az AC egyenes messe a PS és QR egyeneseket a G és H pontokban. Találjunk minél több harmonikus pontnégyest az ábrán. Keressünk olyan harmonikus pontnégyeseket is, amikből csak 3 pont van megjelölve.

HF/2. Adott egy k kör és egy P pont a körön kívül. Nevezzünk egy X pontot szépnek, ha a körön belül van, és (P, X, A, B) harmonikus, ahol A és B a PX egyenes és a k kör két metszéspontja. Mutassuk meg, hogy a szép pontok egy egyenesen vannak.

HF/3. Mutssuk meg, hogy ha $ABCD$ egy húrnégyszög, akkor a köréírt körhöz A-ban és C-ben húzott érintők metszéspontja pontosan akkor van rajta a BD egyenesen, ha a köréírt körhöz B-ben és D-ben húzott érintők metszéspontja rajta van az AC egyenesen.

HF/4. Az ABC háromszög B-ből és C-ből induló szögfelezője messe a szemközti oldalt B'-ben és C'-ben. Igazoljuk, hogy a BC egyenes, a $B'C'$ egyenes és az A csúcsnál lévő külső szögfelező egy ponton mennek át.

HF/5. Legyen a $PQRS$ négyszög szemközti oldalainak metszéspontja A és B, átlóinak a metszéspontja C. Tegyük fel, hogy csak az A, B, C, S pontok adottak. Szerkesszük meg csak vonalzóval a P, Q, R pontokat.

HF/6. Az ABC háromszög B-ből és C-ből induló magasságvonala messe a szemközti oldalt B'-ben és C'-ben. A $B'C'$ és BC egyenesek metszéspontja legyen P. Igazolujuk, hogy a P pontból a $BCB'C'$ körhöz húzott érintők érintési pontjai az A-ból induló magasságvonalra esnek.

2024. február 3.

Szakkörvezető: Imolay András (imolay.andras@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com