



2022. április 8. péntek

Feladat 1. Legyen ABC egy olyan hegyesszögű háromszög, ahol $BC < AB$ és $BC < CA$. A P pont az AB szakaszon, a Q pont az AC szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $P \neq B$, $Q \neq C$ és $BQ = BC = CP$. Legyen T az APQ háromszög körülírt körének középpontja, H az ABC háromszög magasságpontja, valamint S a BQ és CP egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a T , H és S pontok egy egyenesre esnek.

Feladat 2. Jelölje $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ a pozitív egész számok halmazát. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt, amire tetszőleges pozitív egész a, b számokra az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

- (1) $f(ab) = f(a)f(b)$, és
- (2) az $f(a)$, $f(b)$ és $f(a+b)$ számok közül legalább kettő egyenlő.

Feladat 3. Egy pozitív egészekből álló, végtelen $a_1, a_2, \dots$ sorozatot *kockásfülűnek* nevezzük, ha

- (1) a_1 teljes négyzet, és
- (2) minden $n \geq 2$ egészre az a_n a legkisebb pozitív egész szám, amire

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

teljes négyzet.

Bizonyítsuk be, hogy minden kockásfülű $a_1, a_2, \dots$ sorozathoz létezik olyan pozitív egész k szám, amire $a_n = a_k$ teljesül minden $n \geq k$ egész esetén.



2022. április 9. szombat

Feladat 4. Adott $n \geq 2$ pozitív egész számra határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész N számot, amire létezik $N + 1$ valós szám $a_0, \dots, a_N$ úgy, hogy

$$(1) \quad a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}, \text{ és}$$

$$(2) \quad (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1} \text{ minden } 1 \leq k \leq N - 1\text{-re.}$$

Feladat 5. Tetszőleges pozitív egész n, k számokra jelölje $f(n, 2k)$ azt a számot, ahányféleképpen egy $n \times 2k$ -as tábla teljesen lefedhető nk darab 2×1 -es dominóval. (Például $f(2, 2) = 2$ és $f(3, 2) = 3$.) Keressük meg az összes olyan pozitív egész n számot, amire minden pozitív egész k szám esetén $f(n, 2k)$ páratlan.

Feladat 6. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, a körülírt körének középpontját jelöljük O -val. Az A és B pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen X , a B és C pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen Y , a C és D pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen Z , valamint a D és A pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen W . Továbbá, az AC és BD egyenesek metszéspontja legyen P . Tegyük fel, hogy az X, Y, Z, W, O és P pontok mind különbözőek.

Bizonyítsuk be, hogy az O, X, Y, Z és W pontok pontosan akkor fekszenek egy körön, ha a P, X, Y, Z és W pontok egy körön fekszenek.