

2020. április

1. Feladat Legyenek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ pozitív egész számok, melyekre $n = 0, 1, 2, \dots, 3028$ esetén teljesül, hogy

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n.$$

Bizonyítsd be, hogy az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ számok közül legalább az egyik osztható 2^{2020} -nal!

2. Feladat Keresd meg az összes $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nemnegatív valós számokból álló számsort, amelyre a következő három feltétel egyszerre teljesül:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) az $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ -nak létezik egy $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ permutációja, amelyre

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Egy sor permutációja egy ugyanolyan hosszú sor, ami ugyanazokat az elemeket tartalmazza, de az elemek tetszőleges sorrendben lehetnek. Például az $(1, 2, 2)$ -nek a $(2, 1, 2)$ egy permutációja és mindkettő permutációja a $(2, 2, 1)$ -nek. Megjegyzés: minden számsor permutációja önmagának is.

3. Feladat Legyen $ABCDEF$ egy konvex hatszög amelyre $A\angle = C\angle = E\angle$, $B\angle = D\angle = F\angle$ és az $A\angle$, $C\angle$, és $E\angle$ szögek (belső) szögfelezői egy ponton mennek át.

Bizonyítsd be, hogy a $B\angle$, $D\angle$ és $F\angle$ szögek (belső) szögfelezői szintén egy ponton mennek át!

Megjegyzés: $A\angle = FAB\angle$. A hatszög többi belső szögét is hasonlóan jelöltük.

2020. április

4. Feladat Az $1, 2, \dots, m$ egész számok egy permutációját *frissnek* nevezzük, ha nem létezik olyan pozitív egész szám $k < m$, hogy a permutáció első k eleme az $1, 2, \dots, k$ számok valamilyen sorrendben. Legyen f_m az $1, 2, \dots, m$ egész számok friss permutációinak száma.

Bizonyítsd be, hogy $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ minden $n \geq 3$ esetén!

Például ha $m = 4$, akkor a $(3, 1, 4, 2)$ permutáció friss, de a $(2, 3, 1, 4)$ permutáció nem az.

5. Feladat Legyen az ABC háromszögben $\angle BCA < 90^\circ$. Legyen az ABC háromszög körülírt köre Γ , sugara R . Az AB szakasznak van egy olyan P belső pontja, amire $PB = PC$ és a PA szakasz hossza R . A PB szakasz szakaszfelező merőlegese Γ -t a D és E pontokban metszi.

Bizonyítsd be, hogy P a CDE háromszög beírt körének középpontja!

6. Feladat Legyen $m > 1$ egész szám. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, és minden $n \geq 4$ -re,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Határozd meg az összes olyan m egész számot, amire a sorozat minden tagja négyzetszám!